

MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones**Profesor:** Alexis Fuentes**Auxiliares:** Vicente Salinas**Dudas:** vicentesalinas@ing.uchile.cl**Auxiliar 18: Integrales Complejas**

10 de diciembre de 2022

P1. a) Calcule el valor de

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$$

Usando el resultado anterior, muestre que:

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta = 2\pi$$

P2. Sea $f(z) = \frac{e^z}{z(1 - e^{-z})}$ a) Encuentre todas las singularidades de f .

b) Demuestre que son todas singularidades del tipo polo y calcule el orden de cada una.

c) Calcule

$$\oint_{|z|=r} f(z) dz$$

para $0 < r < 2\pi$ **P3.** Calcule la siguiente integral, para $a = \frac{1}{2}$ y $a = 2$:

$$\oint_{|z|=a} \frac{e^{\pi z}}{z^3 + z} dz$$

P4. Calcule $\oint_{|z|=4} \frac{1}{z^2 \sinh(z)} dz$, con $|z| = 4$ recorrido en sentido antihorario.**P5.** Calcule el valor de la siguiente integral:

$$I = \oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz$$

Donde γ es la circunferencia centrada en $z = 0$ y radio 1.**P6.** Usando adecuadamente la formula de Cauchy calcule la siguiente integral.

$$\oint_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$$

Indicación: Utilice fracciones parciales.

Resumen

La formula de Cachy:

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$, entonces para todo $z_0 \in D(p, r)$ se tiene la formula integral de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Teorema de los residuos:

Singularidad reparable en z_0

Existe un disco tal que $f(z)$ es holomorfa en $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, en este caso la integral en una curva cerrada vale 0.

Polo de orden N

$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{N-1} f(z)$ no existe y el $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^N f(z)$ existe.

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{p \in \text{Polos Encerrados}} \text{Res}(f, p)$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} [(z - z_0)^N f(z)]$$

Corolario: Si dos funciones son holomorfas se cumple L'hospital.