MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 16: Integración Compleja

30 de noviembre de 2022

P1. Verifique que la siguiente integral, con Γ la semicircunferencia unitaria, es 0

$$\int_\Gamma z^2 dz$$

P2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-z^2}$ y $b > 0$ pruebe que:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^\infty e^{-y^2} \sin(2by) dy = e^{-b^2} \int_0^b e^{y^2} dy$$

Indicación: Estudie e^{-z^2} en un contorno rectangular adecuado.

P3. *a)* Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Dado $\alpha \in (0, 2\pi)$, pruebe que si

$$\lim_{R\to\infty} R \int_0^\alpha |f(Re^{i\theta})| d\theta = 0 \tag{1}$$

entonces se tiene

$$e^{i\alpha} \int_0^\infty f(e^{i\alpha}x) dx = \int_0^\infty f(x) dx$$

b) Notando que $f(z) = exp(-z^2)$ satisface (1) para todo $\alpha \in (0, \pi/4]$ y recordando que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} ds = \sqrt{\pi}$, calcule el valor de las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(x^2) dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x^2} \sin(x^2) dx$$

Indicación: $\sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

P4. *a)* Pruebe el siguiente resultado. Si f es holomorfa, entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Indicación: Recuerde la formula de cauchy $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$

b) Usando lo anterior para $f(z) = \cos(z)$, pruebe que:

$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos(\theta)) \cosh(\sin(\theta)) d\theta = 2\pi$$

Indicación: Recuerde que $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$