MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 15: Funciones Complejas Series

23 de noviembre de 2022

P1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no vació y $f : \Omega \to \mathbb{C}$, una función tal que:
-Existen $\hat{u}$ y $\hat{v} : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones diferenciales en todo punto Ω que permiten expresar f en coordenadas cartesianas, $z = x + iy$ y $f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$
-Existen u y $v : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones diferenciales en todo punto Ω que permiten expresar f en coordenadas polares, $z = re^{i\theta}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = arctan(y/x)$ y $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$

a) Verifique que $u(r, \theta) = \hat{u}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)))$ y $v(r, \theta) = \hat{v}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)))$. Además pruebe que f es holomorfa en Ω si y solo si cumple:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad -\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

b) Con esto obtenga una formula para $f'(z)$ y compruebe que $f(z) = LOG(z) = \ln(r) + i\theta$, cumple que $f'(z) = \dfrac{1}{z}$

P2. Calcule los radios de convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2^n) z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (log(n))^2 z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z + 2)^{2^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$

P3. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \dfrac{1}{1 - z}$, entorno a $z_0 = 0, -1, i$, también dibuje los discos de convergencia y relacione las distancias de los z_0 con $z = 1$.

P4. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \dfrac{2}{z^2 + 1}$ en torno a $z_0 = 1$.

Resumen

Condiciones de Cachy Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $-\frac{\partial v}{\partial x}$

Teorema: Una función compleja es derivable si y solo si cumple las condiciones de Cauchy Riemann y es Frechet diferenciable .

Aproximación de Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Radio de Convergencia $R = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, con c_k el coeficiente de la serie centrada en z_0.
Obs: El radio puede depender de z_0 **Radio de convergencia**: Si este límite existe también se puede utilizar: $R = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1|}}$