MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 13: Auxiliar Extra C3

9 de noviembre de 2022

P1. Considere la EDP con las siguientes condiciones de bordes e iniciales (P):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + e^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ \forall x \in (0, L),\ t > 0$$

$$u(0, t) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$u(L, t) = 0 \text{ CB en } x = L$$

$$u(x, 0) = f(x) \text{ CI para } u$$

a) Usando el método de separación de variables de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, pruebe que para resolver el problema anterior debe encontrarse la constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el siguiente problema (P') tenga solución no trivial:

$$\alpha X(x) + X''(x) = 0,\ \forall x \in (0, L)$$

$$X(0) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$X(L) = 0 \text{ CB en } x = L$$

b) Pruebe que si $\alpha = 0$, la única solución del problema (P') es $X = 0$

c) Multiplique la EDO del problema (P') por $X(x)$ y luego integre por partes para probar que toda solución de (P') satisface que:

$$\alpha \int_0^L X^2(s)ds + \int_0^L (X'(s))^2 ds = 0$$

d) Use la relación anterior para probar que si $\alpha > 0$ la única solución es $X = 0$

e) Según los resultados anteriores, el problema tiene soluciones no triviales cuando $\alpha < 0$, haga el cambio $-a^2 = \alpha$, con $a > 0$ y resuelva el problema (P') encontrando una solución no trivial.
Hint Recuerde que la solución de la EDO del problema (P') es de la forma:

$$X(x) = A\cos(ax) + B\sin(ax)$$

Use las condiciones de borde para encontrar el valor de las constantes y pruebe que $B\sin(ax) = 0$, con esto concluya que las soluciones no triviales se obtienen cuando $a = a_n$, con $n \in \mathbb{N}*$, especificando quién es a_n y $X_n(x)$.

f) Para cada a_n resuelva la ecuación del tiempo y pruebe que la n-sima solución del problema (P), es de la fomra:

$$u_n(x,t) = [A_n e^{w_n t}] \sin(a_n x)$$

donde debe especificar el valor de w_n en terminos de a_n y datos del problema.

g) Indique cuál es la solución del problema (P) para las condiciones iniciales:

$$f(x) = 5 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

h) Considere el caso general, donde $f(x)$ y $g(x)$ se pueden expandir en serie de Fourier de senos en $[0, L]$. En es te caso, escriba la solución formal $u(x,t)$ del problema (P) como una serie, escribiendo una ecuación que permita calcular A_n, en función de f.

P2. [Cálculo de series]

Dada la función $f(x) = 1_{[0,1]} + 1_{[1,2]}2$ calcule:

a) Su desarrollo en serie de senos en $[0, 2]$, considerando la función de periodo 4

b) Utilizando los cálculos anteriores, aplique el teorema de convergencia para deducir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} = -\frac{\pi}{4}$$