MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 11: Transformada de Fourier y EDPs

26 de octubre de 2022

P1. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

a) Calcule la transformada de Fourier de f

b) Encuentre una función g tal que $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-\xi^2}$, puede dejarla expresada como una integral .

P2. *a*) Sea $f(x) = e^{-ax}1_{x\geq 0}$, pruebe que $\hat{f}(x)(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{a+is}$

b) Ahora calcule la transformada de $g(x) = \begin{cases} e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^{5x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

P3. Encuentre la solución $u(x,t)$ de la ecuación

$$u_{tt} + au_t = u_{xx} \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

Donde $0 < a < 1$, con las condiciones de borde

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0$$

y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \sin(x) + 5\sin(4x)\,, \;\; u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

.

Escriba la solución como una serie especificando los coeficientes.

Indicación: Puede ser útil usar sin probar que:

$$\int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \ell & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \ell & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)dx = 0 \quad \forall n,m \in \mathbb{Z}$$

Resumen

Recuerden que la transformada es lineal

1. $\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x) dx$
2. $\check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} g(s) ds$
3. $\widehat{f'}(s) = is\widehat{f}(s)$
4. $\widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \widehat{f}(s)$
5. $g'(x) = -ix\check{g}(x)$
6. $g^{(k)}(x) = (-ix)^k \check{g}(x)$
7. $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(x-s) ds$
8. $\widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(s) \hat{g}(s)$
9. $f(\widehat{x - x_0})(s) = e^{-isx_0} \hat{f}(s)$
10. $e^{\widehat{is_0 x} f(x)}(s) = \hat{f}(s - s_0)$
11. $\widehat{f(ax)}(s) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$
12. $\widehat{f(-x)}(s) = \hat{f}(-s)$

	$f(x)$	$\widehat{f}(s)$
1	$\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+is}$
2	$e^{-ax^2}, \ a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{s^2}{4a}}$
3	$e^{-a\|x\|}, \ a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + s^2}$
4	$\frac{1}{a^2 + x^2}, \ a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} e^{-a\|s\|}$
5	$\begin{cases} k & \|x\| \leq b \\ 0 & \|x\| > b \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{\operatorname{sen}(bs)}{s}$