MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 10: Series de Fourier

19 de octubre de 2022

P1. [Cálculo de series]

Dada la función $f(x) = |x|$ calcule:

a) Su serie de Fourier en $[-1, 1]$

b) Su desarrollo en serie de senos en $[0, 1]$

c) Su desarrollo en serie de cosenos en $[0, 1]$

d) Utilizando los cálculos anteriores, aplique el teorema de convergencia para deducir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

P2. [Problema de Basilea]

a) Calcule la serie de Fourier de $f(x) = x^2$ en $[-1, 1]$

b) Deduzca que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

P3. *a*) Dada la función $f(x) = 1 - |x|$ calcule su serie de Fourier en $[-1, 1]$. Mencione por que esto es equivalente a que nos pidan su desarrollo en serie de cosenos en $[0, 1]$

b) Dada la función $f(x) = 2 - |x|$ calcule su serie de Fourier en $[0, 2]$, considerando a $f(x)$ una función periódica con $\mathcal{T} = 1$. Explique porque **no** es lo mismo que calcular la la expansión en senos o cosenos con $\mathcal{T} = 2$.

Resumen

Serie de Fourier

Sea $f : [-\mathcal{T}, \mathcal{T}] \to \mathbb{R}$. Diremos que f admite un desarrollo en *Serie de Fourier* en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ si existen escalares $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) \right], \quad \forall x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$$

$$a_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx$$

Convergencia

Nos interesa saber cuando la serie de Fourier converge a la función, o sea, si definimos:

$$S_f^N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) \right]$$

Y llamamos $S_f = \lim\limits_{N \to \infty} S_f^N$ (si es que existe), entonces, ¿Cuándo $S_f = f$?

- Si f es de cuadrado integrable $\left(\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f^2(t)dt < \infty\right)$, Entonces S_f^N converge a f en media cuadrática: $\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} (f(x) - S_f^N)^2 dx \to 0$ cuando $N \to \infty$.

- Si f es continua por trozos en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ y con derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de $(-\mathcal{T}, \mathcal{T})$, donde la derivada por la izquierda en $x = \mathcal{T}$ y por la derecha en $x = -\mathcal{T}$, entonces $S_f^N(x)$ es convergente para cada $x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$. Y se tiene que:

$$S_f(\mathcal{T}) = S_f(-\mathcal{T}) = \frac{1}{2}[f(\mathcal{T}) + f(-\mathcal{T})]$$

  Si f es continua en x_0 entonces $S_f(x_0) = f(x_0)$ y si x_0 es un punto de discontinuidad entonces $S_f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$

- Si f es derivable en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ y $f(\mathcal{T}) = f(-\mathcal{T})$ entonces $f = S_f$ en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$. Si además f' es de cuadrado integrable, la convergencia de S_f^N hacia f es uniforme.

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $2\mathcal{T}-$periódica de clase C^1 entonces $f = S_f$ en $\mathbb{R}$ y S_f^N converge uniformemente a f.