MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 6: Teorema de Stokes

5 de octubre de 2021

P1. [Stoke al límite]

Sea Γ la curva que se obtiene al intersectar $z = x^2 + y^2$ con la parte superior de la superficie de la esfera unitaria, Considere Γ recorrida en antihorario.

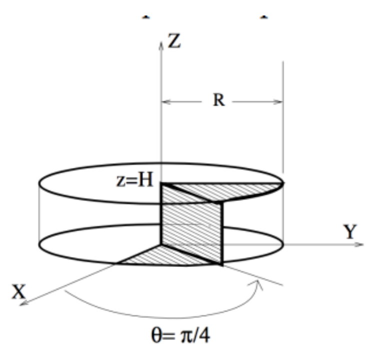
a) Calcule la integral de trabajo de $\vec{F} = (x^2 + z)\hat{\imath} + (y^2 + x)\hat{\jmath} + (z^2 + y)\hat{k}$ a lo largo de Γ.

b) Sea ahora $\vec{F} = \dfrac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$. Pruebe que $rot(\vec{F}) = 0$ si $\rho > 0$, pero que sin embargo $\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción del Teorema de Stokes.

P2. La superficie S corresponde a la unión de 3 pedazos, como se muestra en la siguiente figura, orientada de modo que la normal de sector circular superior apunte hacia arriba. Se define $F = \rho^2\hat{z} + z\rho\hat{\rho}$.

a) Usando la definición de integral de trabajo, calcule la circulación $\displaystyle\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{r}$

b) Calcule la misma circulación, pero utilizando el Teorema de Stokes.



P3. Considere el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2y - 3z + e^x \sin(z))\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + (e^x \cos(z) - 3x)\hat{k}$$

a) Calcule $\text{rot}(\vec{F})$.

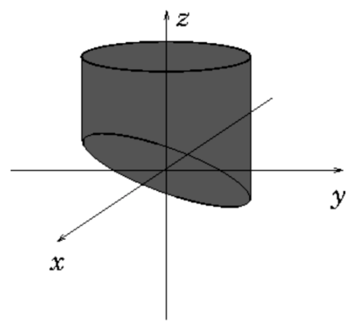
b) Considere la curva Γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), \cos(t)) \quad t \in [0, 2\pi],$$

y calcule

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Indicación: Note que Γ es el borde inferior de la porción del cilindro de la siguiente figura:



P4. [Aplicación de Stokes]

a) Deduzca el teorema de Green en el plano, para esto considere $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y)\hat{\imath} + F_2(x, y)\hat{\jmath}$ de clase C^1.

b) Demuestre que:

$$\acute{A}rea(S) = \frac{1}{2}\int_{\partial S} xdy - ydx$$

c) Sea $a > 0$, calcule el área de la región encerrada por la hipocicloide definida por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, usando la parametrización:

$$x = a\cos^3(t) \qquad y = a\sin^3(t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

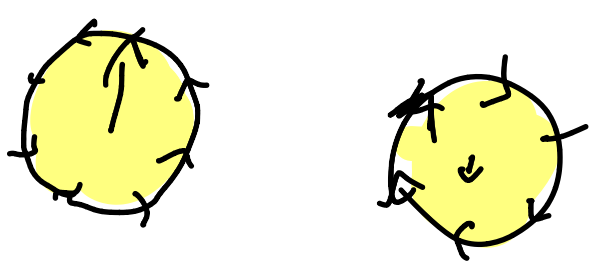
Resumen

Teorema del rotor de Stokes Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una supercie orientable y regular por pedazos, cuyo borde ∂S es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 definido sobre un abierto U que incluye la supercie S y su borde ∂S. Sea nalmente $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S y supongamos que la curva cerrada ∂S es recorrida con orientación positiva con respecto a la elección de la normal ˆ $\hat{n}$, es decir, respetando la regla de la mano derecha, entonces

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA = \iint rot(F) \cdot \vec{n} \, du dv$$

Teorema de Green en el plano Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ una región acotada tal que su frontera ∂S es una curva simple, cerrada y regular por pedazos, orientada en el sentido antihorario. Consideremos dos campos escalares $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$, ambos de clase C^1 en un abierto que contiene a S y ∂S, entonces

$$\int_{\partial S} Mdx + Ndy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$



P1. [Stoke al límite]

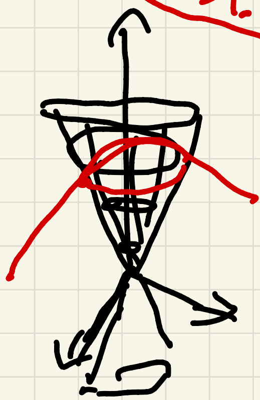
Sea Γ la curva que se obtiene al intersectar $z = x^2 + y^2$ con la parte superior de la superficie de la esfera unitaria, Considere Γ recorrida en antihorario.

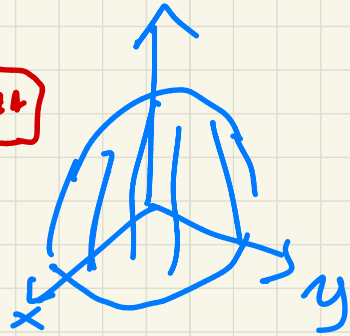
a) Calcule la integral de trabajo de $\vec{F} = (x^2 + z)\hat{\imath} + (y^2 + x)\hat{\jmath} + (z^2 + y)\hat{k}$ a lo largo de Γ.

b) Sea ahora $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$. Pruebe que $rot(\vec{F}) = 0$ si $\rho > 0$, pero que sin embargo $\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción del Teorema de Stokes.

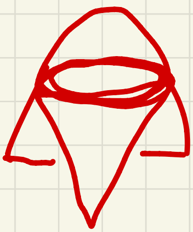
(1) $|z| = x^2 + y^2 = $ Algo

$\boxed{+K \to \text{L desplaza}}$





$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (2)



Si juntamos

$$\underbrace{x^2+y^2}_{z} + z^2 = 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \vee \quad \cancel{z = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}}$$

Nuestra curva esta dada por

$$\boxed{z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$\Gamma \quad \varphi(t) = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\cos(t), \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\sin(t), \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$t \in [0, 2\pi]$

Es un circunferencia

$$\Gamma_{-} \quad \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\cos(t), -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\sin(t), \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

P1. [Stoke al límite]

Sea Γ la curva que se obtiene al intersectar $z = x^2 + y^2$ con la parte superior de la superficie de la esfera unitaria, Considere Γ recorrida en antihorario.

a) Calcule la integral de trabajo de $\vec{F} = (x^2 + z)\hat{\imath} + (y^2 + x)\hat{\jmath} + (z^2 + y)\hat{k}$ a lo largo de Γ.

b) Sea ahora $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$. Pruebe que $rot(\vec{F}) = 0$ si $\rho > 0$, pero que sin embargo $\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción del Teorema de Stokes.

Form 1

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(-\underbrace{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)}_{}^{r} \sin(t), \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right) \cos(t), 0 \right)$$

$$F(\varphi(t)) = \left(r^2 \cos^2(t) + r, r^2 \sin^2(t) + r\cos(t), r^2 + r\sin(t) \right)$$

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi(t)) \cdot \frac{d\varphi}{dt}\, dt = \int -r^3 \cancel{\cos^2(t)\sin(t)} - r^2 \cancel{\sin(t)} + r^3 \cancel{\sin^2(t)\cos(t)} + r^2 \cos^2(t)$$

$$\boxed{\frac{\cos^3(t)}{3}} \qquad \boxed{\frac{\sin^3(t)}{3}}$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2(t)\, dt$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cancel{\cos(2t)}}{2}\, dt$$

$$= \pi r^2$$

e $\vec{F} = (x^2+z)\hat{i} + (y^2+x)\hat{j} + (z^2+y)\hat{k}$

$$\mathrm{rot}(F) = (1-0)\hat{i} + (1-0)\hat{j} + (1-0)\hat{k}$$

$$= (1, \cancel{1}, 1)$$

~~No me importa~~

Quiero $S = \left(\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta), \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \right)$

$$r \in \left[0, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right]$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \begin{array}{ccc|cc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ (\cos\theta, & \sin\theta, & 0) & \cos\theta, & \sin\theta) \end{array}$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) -r\sin\theta, r\cos\theta)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} \times \frac{d\varphi}{d\theta} = (r)\,\hat{k}$$

$$\int F \cdot d\vec{r} = \int_0^{\text{radio}} \int_0^{2\pi} (\text{Algo}, \text{Algo}, 1) \cdot (0, 0, r)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\text{radio}} \int_0^{2\pi} r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi \Big|_0^{\text{radio}}$$

$$= \boxed{\text{radio}^2\, \pi}$$

$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$. Pruebe que $rot(\vec{F}) = 0$ si $\rho > 0$,

$h_\rho = 1 \quad h_\theta = \rho \quad h_z = 1$

$$rot(F) = \frac{1}{\rho}\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial\theta}(z)}^{0} - \cancel{\frac{\partial}{\partial z}(1)}^{0}\right]\hat{\rho}$$

$$+ \frac{1}{1}\left[\frac{\partial}{\partial z}(0) - \cancel{\frac{\partial}{\partial\rho}(z)}^{0}\right]\hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\cdot\rho\right)}^{0} - \cancel{\frac{\partial}{\partial\theta}(0)}\right]\hat{k}$$

$$= 0$$

Tiene problemas para $\boxed{\rho = 0}$

Entonces no uso Stokes

$\Rightarrow$ Por definición

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

$$\hat{\rho} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$F = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$$

$$F(\rho,\theta,z) = \left(-\frac{\sin\theta}{\rho}, \frac{\cos\theta}{\rho}, z\right)$$

$$\varphi(t) = \left(\underbrace{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\cos(t)}_{x}, \underbrace{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\sin(t)}_{y}, \underbrace{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}_{z}\right)$$

$$F(\rho,\theta,z) = \left(-\frac{\rho\sin(\theta)}{\rho^2}, \frac{\rho\cos(\theta)}{\rho^2}, z\right)$$

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right)$$

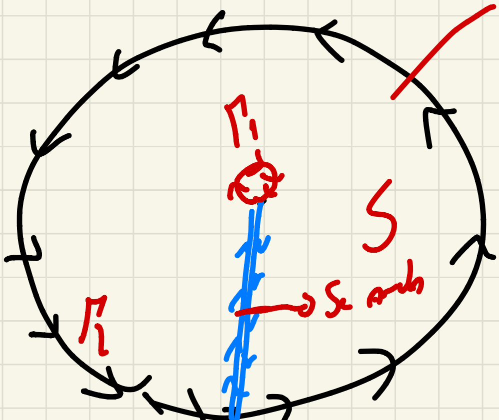
$$F(\varphi(t)) = \left(\frac{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\sin(t)}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\cos(t)}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$$

$$\varphi'(t) = \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\sin(t), \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\cos(t), 0\right)$$

$$F(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = \frac{\cancel{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\sin^2(t)}{\cancel{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} + \cos^2(t) + 0$$

$$\int_0^{2\pi} 1\, dt = \boxed{2\pi}$$

Complete Stoke



$$\int_S \underbrace{\mathrm{rot}(F)}_{0} = \int_{\Gamma_2} F + \int_{\Gamma_1} F$$

Γ_2: Antihorario $\qquad$ Γ_1: Horario

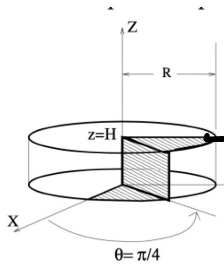
$$\Rightarrow \int_{\text{Circulo Grande}} F = \int_{\text{Circulo Chico}} F$$

esta aparente contradicción del Teorema de Stokes.

P2. La superficie S corresponde a la unión de 3 pedazos, como se muestra en la siguiente figura, orientada de modo que la normal de sector circular superior apunte hacia arriba. Se define $F = \rho^2\hat{z} + z\rho\hat{\rho}$.

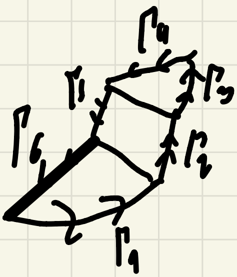
a) Usando la definición de integral de trabajo, calcule la circulación $\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{r}$

b) Calcule la misma circulación, pero utilizando el Teorema de Stokes.



$\hat{\rho} = (0,1,0) = (\cos(\frac{\pi}{4})\hat{i} ...$

$\frac{\pi}{4}$



Γ	$\hat{t}$		F	$F \cdot \hat{t}$
Γ_1	$\hat{\theta}$	$z=0$, $\rho=R$	$R^2\hat{z}$	0
Γ_2	$\hat{z}$	$\rho=R$	$R^2\hat{z}+zR\hat{\rho}$	R^2
Γ_3	$\hat{\theta}$	$\rho=R$, $z=H$	$R^2\hat{z}+HR\hat{\rho}$	0
Γ_4	$-\hat{\rho}$	$z=H$	$\rho^2\hat{z}+H\rho\hat{\rho}$	$-H\rho^2$
Γ_5	$-\hat{z}$	$\rho=0$	0	0
Γ_6	$\hat{\rho}$	$z=0$	$\rho^2\hat{z}$	0

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} F \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_4} F \cdot d\vec{r}$$

Γ_1 $\varphi(t) = (R\cos(\frac{\pi}{4}), R\sin(\frac{\pi}{4}), t)$

$t \in [0, H]$

$\varphi'(t) = (0, 0, 1)$, $\boxed{F(P_1) = R^2\hat{z} + tR\hat{\rho}}$

Γ_4 $\varphi(t) = ((R-t)\cos(\frac{\pi}{2}), (R-t)\sin(\frac{\pi}{2}), H)$

$t \in [0, R]$

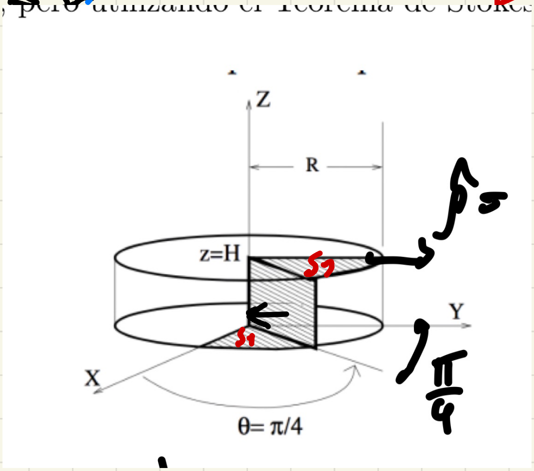
$\varphi'(t) = (-\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{0}, \underbrace{-\sin(\frac{\pi}{2})}_{-1}, \underbrace{0}_{0})$

$F(P_4) = (R-t)^2\hat{z} + H(R-t)\hat{\rho}$

$= (0, H(R-t)\cdot 1, (R-t)^2)$

$\int F\cdot d\vec{r} = \int_0^H R^2\, dz + \int_0^R H(R-t)\cdot(-1)\,dt = R^2H + H\left.\frac{(R-t)^2}{2}\right|_0^R$

$= R^2H - \frac{R^2H}{2} = \boxed{\frac{R^2H}{2}}$



S_1 y S_3 como son los $\hat{n}$ son en $\hat{k}$

S_2 es en $\hat{\theta}$

$$\text{rot}(F) = -\rho\,\hat{\theta} \qquad (A)$$

$\Rightarrow$ Stokes

$$\oint_{\Gamma} F = \int_{S_1} \cancelto{0}{\operatorname{rot}(F)\hat{n}} + \int_{S_2} \operatorname{rot}(F)\hat{n} + \int_{S_3} \cancelto{0}{\operatorname{rot}(F)\hat{n}}$$

$$= \int_0^H \int_0^R -\rho\,\hat{\theta} \cdot \underbrace{(-\hat{\theta}) \cdot 1}_{} \, d\rho \, dz \qquad \frac{d\psi}{d\rho} \times \frac{d\psi}{dz}$$

Jacobi podría tener norma

$$= \int_0^H \int_0^R \rho \, d\rho \, dz$$

$$= H \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^R = \boxed{\frac{HR^2}{2}}$$

P3. Considere el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x^2y - 3z + e^x\sin(z))\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + (e^x\cos(z) - 3x)\hat{k}$$

a) Calcule $\mathrm{rot}(\vec{F})$.

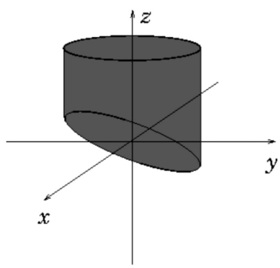
b) Considere la curva Γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), \cos(t)) \qquad t \in [0, 2\pi],$$

y calcule

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Indicación: Note que Γ es el borde inferior de la porción del cilindro de la siguiente figura:

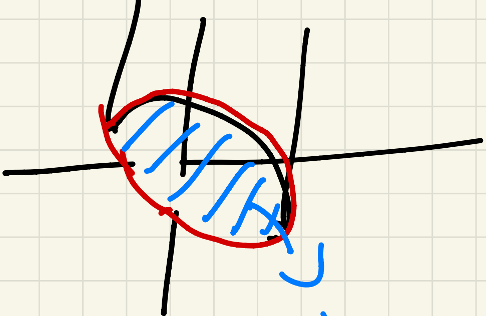


a) $(0-0)\hat{\imath} + (-3 + \cancel{e^x\cos(z) - (e^x\cos(z)} - 3))\hat{\jmath}$

$+ (2x - 3x^2)\hat{k}$

$\Rightarrow \mathrm{rot}(F) = (2x - 3x^2)\hat{k}$

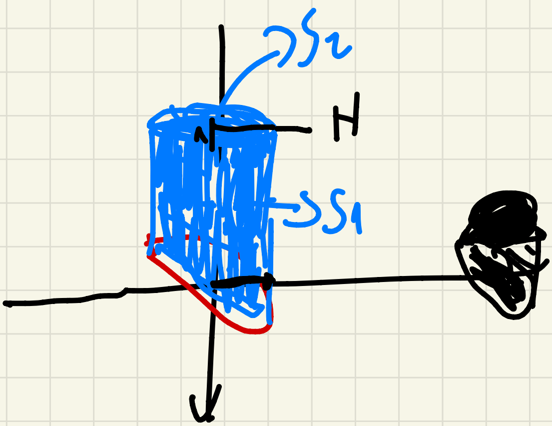
b) $\int_0^{2\pi} \left(3(\cos(t)^2\sin(t)), \ldots, e^{\cos(t)}\right)(-\sin(t), \ldots$



No usaremos esta

$$\varphi(r,t) = (r\cos(t),\ r\sin(t),\ r\cos(t))$$

$$r \in [0,1]$$
$$t \in [0,2\pi]$$



$$\int_{S_1} \operatorname{rot}(F)\cdot \hat{n}\, dA + \int_{S_2} \operatorname{rot}(F)\cdot \hat{n}\, dA = \int_{\Gamma} F\cdot d\vec{r}$$

Pero el $\text{rot}(F) = (2x - 3x^2)\,\hat{k}$

$$\Rightarrow \int_{S_1} \cancel{\text{rot}(F)\cdot\hat{n}}^{\,0} \quad \text{pues} \quad \hat{n} = \hat{\rho}$$

$$S_2 \Rightarrow \quad \varphi(r,\theta) = \{ (r\cos\theta, r\sin\theta, H) \}$$

$$r \in [0,1]$$

$$\theta \in [0,2\pi]$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = r\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \int_{S_2} \text{rot}(F)\cdot\hat{n}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (\cancel{2r\cos(\theta)}^{\,0} - 3r^2\cos\theta^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= -3\left(\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2\,d\theta\right)\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)$$

$$= -\frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cancel{\cos(2\theta)}^{\,0}}{2}\,d\theta$$

$$= \boxed{-\frac{3\pi}{4}}$$

P4. [Aplicación de Stokes]

a) Deduzca el teorema de Green en el plano, para esto considere $\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y)\hat{\imath} + F_2(x,y)\hat{\jmath}$ de clase C^1.

b) Demuestre que:

$$\acute{A}rea(S) = \frac{1}{2}\int_{\partial S} xdy - ydx$$

c) Sea $a > 0$, calcule el área de la región encerrada por la hipocicloide definida por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, usando la parametrización:

$$x = a\cos^3(t) \qquad y = a\sin^3(t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Resumen

a)

$$\int_{\partial S} \underset{F_1}{M}dx + \underset{F_2}{N}dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$

$$rot(F) = \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \overset{0}{\cancel{\frac{\partial F_2}{\partial z}}}\right)\hat{\imath} + \left(\overset{0}{\cancel{\frac{\partial F_1}{\partial z}}} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\iint_S \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}\cancel{\hat{k}\cdot\hat{k}}\, dxdy = \int_{\partial S} F_1 \cdot dx + F_2\, dy$$

b) $F_2 = x$

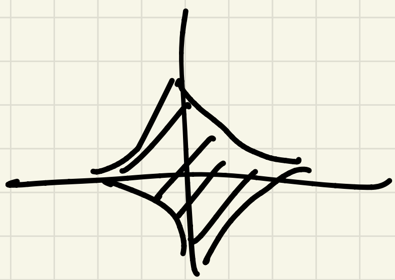
$F_1 = -y$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial F_1}{\partial x} = 1$

$\frac{\partial F_2}{\partial y} = -1$

$$\Rightarrow \iint_S 2 \, dx\,dy = \int_{\partial S} -y\,dx + x\,dy$$

$$\text{Area}(S) = \frac{1}{2} \int_{\partial S} -y\,dx + x\,dy$$

c)



$x = a \cos^3(t)$, $y = a \sin^3(t)$

$$\vec{F}(x,y) = (-y, x)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(-a\sin^3(t), a\cos^3(t)\right) \cdot \begin{pmatrix} -3a\cos^2\sin(t), \\ 3a\sin^2\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$dx = -a\,3 \cdot \cos^2(t)\sin(t)\,dt$$

$$dy = a\,3\,\sin^2(t)\cos(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3a^2\cos^2(t)\sin^4(t) + 3a^2\sin^2(t)\cos^4(t) \quad dt$$

$$= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\sin^2(t)\,(\underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_{1})\,dt$$

$$= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \left(2 \sin(t) \cos(t)\right)^2 dt$$

$$= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin(2t)^2 \, dt$$

$$= \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} 1 - \cancel{\cos(4t)}^{\,0} \, dt$$

$$= \boxed{\frac{3a^2}{8} \pi}$$