MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 8: Integrales de Trabajo y Teorema de Stokes

5 de octubre de 2022

P1. [Stoke al límite]

Sea Γ la curva que se obtiene al intersectar $z = x^2 + y^2$ con la parte superior de la superficie de la esfera unitaria, Considere Γ recorrida en antihorario.

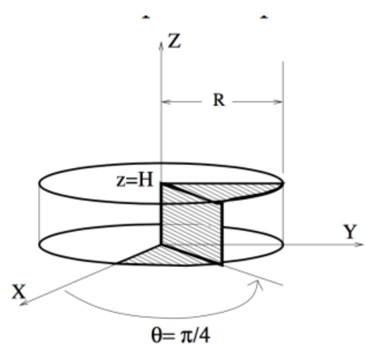
a) Calcule la integral de trabajo de $\vec{F} = (x^2 + z)\hat{i} + (y^2 + x)\hat{j} + (z^2 + y)\hat{k}$ a lo largo de Γ.

b) Sea ahora $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$. Pruebe que $rot(\vec{F}) = 0$ si $\rho > 0$, pero que sin embargo $\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción del Teorema de Stokes.

P2. La superficie S corresponde a la unión de 3 pedazos, como se muestra en la siguiente figura, orientada de modo que la normal de sector circular superior apunte hacia arriba. Se define $F = \rho^2\hat{z} + z\rho\hat{\rho}$.

a) Usando la definición de integral de trabajo, calcule la circulación $\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{r}$

b) Calcule la misma circulación, pero utilizando el Teorema de Stokes.



P3. [Aplicación de Green]

a) Demuestre que:

$$\acute{A}rea(S) = \frac{1}{2}\int_{\partial S} xdy - ydx$$

b) Sea $a > 0$, calcule el área de la región encerrada por la hipocicloide definida por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, usando la parametrización:

$$x = a\cos^3(t) \qquad y = a\sin^3(t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Resumen

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

$$div(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial(F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial(F_v h_u h_w)}{\partial v} + \frac{\partial(F_w h_u h_v)}{\partial w}\right)$$

$$\vec{r}ot(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

Teorema del rotor de Stokes Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una supercie orientable y regular por pedazos, cuyo borde ∂S es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 definido sobre un abierto U que incluye la supercie S y su borde ∂S. Sea nalmente $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S y supongamos que la curva cerrada ∂S es recorrida con orientación positiva con respecto a la elección de la normal ˆ $\hat{n}$, es decir, respetando la regla de la mano derecha, entonces

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$

Teorema de Green en el plano Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ una región acotada tal que su frontera ∂S es una curva simple, cerrada y regular por pedazos, orientada en el sentido antihorario. Consideremos dos campos escalares $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$, ambos de clase C^1 en un abierto que contiene a S y ∂S, entonces

$$\int_{\partial S} M dx + N dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$