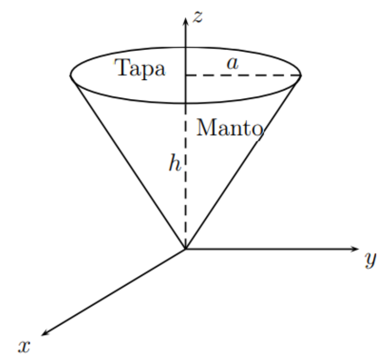
MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 7: Integrales de Flujo y Teorema de Gauss

30 de septiembre de 2022

P1. Confirme el teorema de Gauss para $S \subset \mathbb{R}^3\{[0,1]^3\}$ con el campo $\vec{F}(x,y,z) = x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$.

P2. Se desea calcular el flujo del campo vectorial $\overrightarrow{F} = -\hat{k}$ hacia afuera del manto (sin la tapa) del cono invertido de radio a y altura h que se muestra en la siguiente figura:



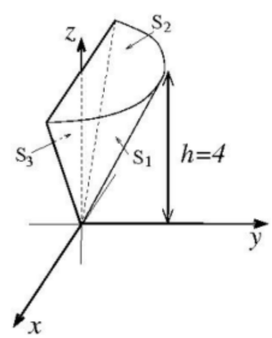
P3. Verifique el teorema de Gauss para el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$\vec{F}(x,y,z) = 4xz\hat{\imath} + xyz\hat{\jmath} + 3z\hat{k}$$

usando como volumen de integración

$$\Omega \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4 \right\}$$

representado en la siguiente figura:



Propuesto: [Gauss al límite]

De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un protón y un neutrón y tienen como potencial a $U(r) = K\dfrac{e^{-\alpha r}}{r}$ en coordenadas esféricas, para cierta constante $K < 0$ y $\alpha > 0$.

1. Encuentre la fuerza $F = -\nabla U$, en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$.

2. Calcule directamente el flujo a través de un casquete esférico de radio a ($a > 0$), orientado según la normal exterior.

3. Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$, en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$.

4. Demuestre que si Ω es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{S} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U dV$$

Resumen

1. Sea S una superficie parametrizada por $\phi(u,v) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

2. Definimos el vector normal a la superficie por $\hat{n}\dfrac{\partial_u\phi \times \partial_v\phi}{||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||}$.

3. Un punto en la superficie se dice regular si los los vectores tangentes en las direcciones u, v no son nulos ni paralelos, ie, su producto vectorial no es nulo, ie, el vector normal no es nulo.

4. El área de la superficie S viene dada por:

$$A(S) \iint_S dS = \iint_D ||\partial_u\phi \times \partial_v\phi|| dudv$$

   Donde $dS = ||\partial_u\phi \times \partial_v\phi|| dudv$.

5. La integral de f sobre la superficie S viene dada por:

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\phi(u,v)) ||\partial_u\phi \times \partial_v\phi|| dudv$$

6. La integral de flujo de $\vec{F}$ sobre la superficie S viene dada por:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_D \vec{F}(\phi(u,v)) \cdot [\partial_u\phi \times \partial_v\phi] (u,v) dudv$$

   Donde (u,v) significa que está siendo evaluada dicha función.

El teorema de la divergencia de Gauss es un resultado fundamental del cálculo vectorial. Formalmente, consiste en una expresión del tipo

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot dA = \iiint_{\Omega} div(\vec{F}) dV$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ y $\partial\Omega$ es una superficie cerrada regular por pedazos orientada según la normal exterior a la región Ω.