MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 6: Integrales de Flujo

28 de septiembre de 2022

P1. **[Integral de Flujo]**

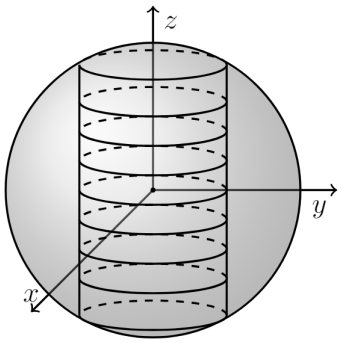
Un fluido se somete al campo de velocidades

$$\vec{V}(x,y,z) = (x - yz)\hat{\imath} + (y + xz)\hat{\jmath} + (z + 2xy)\hat{z}$$

.

Sea S_1 la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Calcule $\iint_{S_1} \vec{V} \cdot \hat{n} dA$ con $\hat{n}$ normal interior del cilindro.



P2. Calcule la integral de flujo $\int\int_S F \cdot n dS$, donde $F(x,y,z) = (xy, -x^2, x + z)$, S es la la porción del plano $2x + 2y + z = 6$ situada en el primer octante y n es la normal que apunta hacia arriba.

P3. Considere la superficie definida por

$$S = \left\{ (\cos(z)\cos(\theta), \cos(z)\sin(), z) : \theta \in [0, 2\pi), z \in [0, \frac{\pi}{2}] \right\}.$$

a) Calcule el área de S.

b) Escoja una orientación para S y calcule $\int \vec{F} \cdot n dS$ para los siguientes campos vectoriales:

1) $F(x,y,z) = (x,y,0)$.
2) $F(r,\phi,\theta) = \exp(r^3) + cos(\phi)\hat{\theta}$ (en coordenadas esféricas).

Resumen

1. Sea S una superficie parametrizada por $\phi(u,v) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
2. Definimos el vector normal a la superficie por $\hat{n}\dfrac{\partial_u\phi \times \partial_v\phi}{||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||}$.
3. Un punto en la superficie se dice regular si los los vectores tangentes en las direcciones u, v no son nulos ni paralelos, ie, su producto vectorial no es nulo, ie, el vector normal no es nulo.
4. El área de la superficie S viene dada por:

$$A(S)\iint_S dS = \iint_D ||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||dudv$$

   Donde $dS = ||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||dudv$.

5. La integral de f sobre la superficie S viene dada por:

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\phi(u,v))||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||dudv$$

6. La integral de flujo de $\vec{F}$ sobre la superficie S viene dada por:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \iint_D \vec{F}(\phi(u,v))\cdot\left[\partial_u\phi \times \partial_v\phi\right](u,v)dudv$$

   Donde (u,v) significa que está siendo evaluada dicha función.

El teorema de la divergencia de Gauss es un resultado fundamental del cálculo vectorial. Formalmente, consiste en una expresión del tipo

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot dA = \iiint_\Omega div(\vec{F})dV$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ y $\partial\Omega$ es una superficie cerrada regular por pedazos orientada según la normal exterior a la región Ω.