MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 5

21 de septiembre de 2022

P1. *a*) Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por

$$x = \sin\gamma \quad y = \mu \quad z = \cos\gamma$$

con $\gamma \in [0, 2\pi]$ $\quad \mu \in [-1, 3]$.

b) ¿Qué puede decir de la regularidad de las superficies?

P2. [**Área de superficie**]

a) Encuentre el área de la superficie definida por $S = \{x^2 + y^2 \leq 2;\ z = xy\}$.

b) Sea $\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ y sea D el disco unitario en el plano (u, v). Encuentre el área de $\phi(D)$.

P3. [**Integrales sobre superficies**]

Evalúe la integral

$$\iint_S (x^2 z + y^2 z) dS$$

en $S = \{x^2 + y^2 \leq 4;\ z = 4 + x + y\}$.

Resumen

Coordenadas Cilíndricas: $T(\rho,\theta,k) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), k)$ y los factores $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_k = 1$

Coordenadas Esféricas: $T(r,\phi,\theta) = (r\cos(\theta)\sin(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\phi))$ y los factores $h_r = 1$, $h_\theta = r\sin(\phi)$ y $h_\phi = r$.

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial w_j}\left[\frac{h_1h_2h_3}{h_j^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial w_j}\right)\right]$$

$$div(F) = \frac{1}{h_uh_vh_w}\left(\frac{\partial(F_uh_vh_w)}{\partial u} + \frac{\partial(F_vh_uh_w)}{\partial v} + \frac{\partial(F_wh_uh_v)}{\partial w}\right)$$

$$rot(F) = \frac{1}{h_uh_vh_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_uh_u & F_vh_v & F_wh_w \end{vmatrix}$$

1. Sea S una superficie parametrizada por $\phi(u,v) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
2. Definimos el vector normal a la superficie por $\hat{n}\dfrac{\partial_u\phi \times \partial_v\phi}{||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||}$.
3. Un punto en la superficie se dice regular si los los vectores tangentes en las direcciones u, v no son nulos ni paralelos, ie, su producto vectorial no es nulo, ie, el vector normal no es nulo.
4. El área de la superficie S viene dada por:

   $$A(S)\iint_S dS = \iint_D ||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||dudv$$

   Donde $dS = ||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||dudv$.
5. La integral de f sobre la superficie S viene dada por:

   $$\iint_S f dS = \iint_D f(\phi(u,v))||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||dudv$$

Un punto en la superficie se dice **regular** si los los vectores tangentes (normalizados) en las direcciones u, v no son nulos ni paralelos, ie, el vector normal (normalizado) no es nulo.