MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 4

7 de septiembre de 2022

P1. *a*) Calcule el gradiente en coordenadas cartesianas de

$$f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

¿Calcúlelo en coordenadas esféricas? ¿Como se relacionan estos cálculos?

b) Se definen las coordenadas parabólicas (ϵ, η, ϕ), tal que $x = \epsilon\eta\cos(\phi)$, $y = \epsilon\eta\sin(\phi)$ y $z = \dfrac{1}{2}(\eta^2 - \epsilon^2)$. Calcule el gradiente y el laplaciano en estas coordenadas. ($\eta, \epsilon > 0$ y $\phi \in [0, 2\pi]$)

P2. Sea $\overrightarrow{F} : \Omega \subseteq R^3 \to R^3$ y los campos escalar $f, g : \Omega \subseteq R^3 \to R$, suficientemente diferenciables probar que:

$$div(f\overrightarrow{F}) = f div\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F} \cdot \nabla f$$
$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla g$$

P3. *a*) Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por

$$x = \cos\alpha\sin\beta \quad y = \sin\alpha\sin\beta \quad z = \cos\beta$$

con $\alpha \in [0, 2\pi]$ $\quad \beta \in [0, \pi]$.

b) Repita para

$$x = \sin\gamma \quad y = \mu \quad z = \cos\gamma$$

con $\gamma \in [0, 2\pi]$ $\quad \mu \in [-1, 3]$.

c) ¿Qué puede decir de la regularidad de las superficies?

Resumen

Coordenadas Cilíndricas: $T(\rho,\theta,k) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), k)$ y los factores $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_k = 1$

Coordenadas Esféricas: $T(r,\phi,\theta) = (r\cos(\theta)\sin(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\phi))$ y los factores $h_r = 1$, $h_\theta = r\sin(\phi)$ y $h_\phi = r$.

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial w_j}\left[\frac{h_1h_2h_3}{h_j^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial w_j}\right)\right]$$

$$div(F) = \frac{1}{h_uh_vh_w}\left(\frac{\partial(F_uh_vh_w)}{\partial u} + \frac{\partial(F_vh_uh_w)}{\partial v} + \frac{\partial(F_wh_uh_v)}{\partial w}\right)$$

$$rot(F) = \frac{1}{h_uh_vh_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_uh_u & F_vh_v & F_wh_w \end{vmatrix}$$

Sea S una superficie parametrizada por $\phi(u,v) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
Definimos el **vector normal** a la superficie por $\hat{n} = \dfrac{\partial_u\phi \times \partial_v\phi}{||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||}$.
Un punto en la superficie se dice **regular** si los los vectores tangentes (normalizados) en las direcciones u, v no son nulos ni paralelos, ie, el vector normal (normalizado) no es nulo.