MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 2: Mas Curvas e Integrales

24 de agosto de 2022

P1. [**Recordatorio Clase 1**] Considere $r(t) = (Re^{-at}\cos(t), Re^{-at}\,\text{sen}(t))$, con $t \in [0, 4\pi]$. Determinar si la curva es suave, simple, regular y calcule la función de longitud de curva.

P2. Jugando con curvas: Trasladar, Amplificar, Cambiar sentido de recorrido, Reflejar.

P3. [**Centros de Masa**]

a) Calcular el centro de masa del alambre que sigue la curva, parametrizada por $r(t) = \left(a\cos(t), a\sin(t), \dfrac{ht}{2\pi}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$ y cuya densidad de masa está dada por $\rho(x, y, z) = x^2$.

b) Considere el anillo dado por la circunferencia de radio r (centrada en el origen), si el anillo tiene densidad uniforme $2m$ en el semiplano superior $(Y > 0)$ y m en el inferior.
[**Propuesto:**] Verificar que el centro de masa del anillo, con densidad uniforme, es el origen.

c) Calcule el centro de masa del borde del triangulo con los vértices $(0, 0)$, $(6, 0)$ y $(3, \sqrt{3}a/2)$ y densidad uniforme.
[**Propuesto:**] Verificar que el centro de masa de los bordes del cuadrado centrado en el origen y de lados 1, con densidad uniforme, es el origen.

P4. Considere Γ, una circunferencia de radio 5, centrada en $(1, 1)$, calcule las integrales de trabajo de los siguientes campos vectoriales .

a) $F(x, y) = (y, x)$

b) $F(x, y) = (1, y^2 - y)$

Propuesto: Hacerlo para la elipse de radios $a = 3$ y $b = 4$, centrada en $(1, 1)$

Resumen

Norma euclidiana de un vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \in R^n$: $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ...x_i^2 + .. + x_n^2}$

Una curva Γ es:
1) **Suave:** Si admite una parametrización de clase C^1.
2) **Regular:** Si admite una parametrización $\overrightarrow{r}(t)$ de clase C^1 tal que $\|\frac{dr(t)}{dt}\| > 0$, $\forall t \in [a, b]$.
3) **Simple:** Si admite una parametrización de clase C^1 que sea inyectiva.
4) **Cerrada:** Si admite una parametrización $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que: $r(a) - r(b) = 0$.
5) **Cerrada simple:** Si admite una parametrización $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $r(a) = r(b)$ y que sea inyectiva sobre $[a, b)$.

Sea Γ una curva simple y regular y $\overrightarrow{r}(t)$ regular. Definimos la función longitud de arco $s : [a, b] \to [0, L(\Gamma)]$ como:

$$s(t) := \int_a^t \left\| \frac{d\overrightarrow{r}(\hat{t})}{d\hat{t}} \right\| d\hat{t}$$

Observación: El caso de $t = b$, entrega exactamente la longitud de curva entre $\overrightarrow{r}(a)$ y $\overrightarrow{r}(b)$.

Integral de Linea Sea $f : \Omega \subset R^n \to R$ y sea $\Gamma \subset \Omega$, una curva con una parametrización simple y regular $r(t)$, con $t \in [a, b]$, se defina la integral de linea sobre Γ como:

$$\int_\Gamma f := \int_a^b f(r(\hat{t})) \left\| \frac{d\overrightarrow{r}(\hat{t})}{d\hat{t}} \right\| d\hat{t}$$

Comentarios: Si $f = \rho$ y ρ es la densidad de masa de la curva, la integral de linea es M, la Masa de la curva. El centro de gravedad estará dado por (X_G, Y_G, Z_G), con $M * X_G = \int_a^b x(\hat{t}) * \rho(r(\hat{t})) * \left\| \frac{d\overrightarrow{r}(\hat{t})}{d\hat{t}} \right\| d\hat{t}$ y el resto similares.

Integral de trabajo de un campo $\overrightarrow{F}$ sobre una curva:
Sea Γ una curva simple y regular en $\mathbb{R}^3$, y sea $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Se define la integral de $\overrightarrow{F}$ sobre la curva Γ, donde $\overrightarrow{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular de Γ. mediante:

$$W = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} := \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} dt$$