MA2002-7 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 1: Curvas

17 de agosto de 2022

P1. Sea la parametrización $r(t) = \left(\sqrt[3]{t}, t\right)$, $t \in [-1, 1]$,

a) Grafique la curva.

b) Esta parametrización es suave, simple y/o regular?

c) ¿La curva es suave?

P2. Sea la parametrización $r(t) = \left(a\cos(t), a\sin(t), \frac{ht}{2\pi}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$

a) Esta parametrización es suave, simple y/o regular?.

b) Encontrar la función de longitud de arco para esta curva.

P3. Una hormiga que parte en el origen, sube por el alambre parametrizado (con t positivo) por:

$$r(t) = \left(t^2\cos(t), t^2\sin(t), \frac{t^3}{\sqrt{3}}\right)$$

Esta parametrización es suave, simple y/o regular?. Determine a qué distancia del plano OXY se encuentra la hormiga cuando ha recorrido una distancia $d = \frac{14}{3}$ por el alambre.

P4. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $e^x - f(x) - 1$. Determine $f(x)$.
Indicación: Utilizar TFC

Resumen

Norma euclidiana de un vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \in R^n$: $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ...x_i^2 + .. + x_n^2}$

Una curva Γ es:
1) **Suave:** Si admite una parametrización de clase C^1.
2) **Regular:** Si admite una parametrización $\overrightarrow{r}(t)$ de clase C^1 tal que $\|\frac{dr(t)}{dt}\| > 0$, $\forall t \in [a, b]$.
3) **Simple:** Si admite una parametrización de clase C^1 que sea inyectiva.
4) **Cerrada:** Si admite una parametrización $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que: $r(a) - r(b) = 0$.
5) **Cerrada simple:** Si admite una parametrización $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $r(a) = r(b)$ y que sea inyectiva sobre $[a, b)$.

Sea Γ una curva simple y regular y $\overrightarrow{r}(t)$ regular. Definimos la función longitud de arco $s : [a, b] \to [0, L(\Gamma)]$ como:

$$s(t) := \int_a^t \left\| \frac{d\overrightarrow{r}(\hat{t})}{d\hat{t}} \right\| d\hat{t}$$

Observación: El caso de $t = b$, entrega exactamente la longitud de curva entre $\overrightarrow{r}(a)$ y $\overrightarrow{r}(b)$.

Integral de Linea Sea $F : \omega \subset R^n \to R^n$ y sea $\Gamma \subset \Omega$, una curva con una parametrización simple y regular $r(t)$, con $t \in [a, b]$, se defina la integral de linea sobre Γ como:

$$\int_\Gamma F := \int_a^b F(r(\hat{t})) \left\| \frac{d\overrightarrow{r}(\hat{t})}{d\hat{t}} \right\| d\hat{t}$$