

Tutoría Preparación Examen

06 de enero de 2021

P1. Sea S la superficie de la elipsoide de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 = 1$$

a) Dado $\vec{x} \in S$ encuentre la normal unitaria exterior $\hat{n}$ de S en $\vec{x}$. Para ello use la función:

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 - 1$$

Note que S corresponde a la superficie de nivel cero de g . Si llamamos Π al plano tangente de S en $\vec{x}$ recuerde entonces que el gradiente de g en $\vec{x}$ es perpendicular a Π .

b) Encuentre la ecuación de Π . Muestre que el vector $\vec{p} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$ verifica la ecuación de Π y que es perpendicular a este. Notar que $f = \vec{x} \cdot \hat{n}$ corresponde a la distancia entre el origen y Π .

c) Muestre que:

$$\int \int_S f dA = 4\pi a$$

d) Considere el campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a^2}, y, z \right)$$

Muestre que $\vec{F}$ es paralelo a $\hat{n}$.

e) Pruebe que $f = 1/(\vec{F} \cdot \hat{n})$ sobre S .

f) Muestre que:

$$\int \int_S \frac{1}{f} dA = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2a^2 + 1}{a} \right)$$

P2. a) Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

b) Determine los ceros y polos (con sus órdenes) de la función:

$$f(z) = \frac{e^{2z} \sin(z)}{z^3(z+i)}$$

Propuesto: Use las fórmulas de Cauchy y Residuos para calcular $\oint_{\gamma} f(z) dz$, donde $\gamma : |z - 1 - i| = r > 0$.

Tutoría Examen

Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Taller Los Dos Relojes

Leonel Huerta

6 de enero de 2021

Problema 1 (a)

Dado $\vec{x} \in S$ encuentre la normal unitaria exterior $\hat{n}$ de S en $\vec{x}$. Para ello use la función:

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 - 1$$

Note que S corresponde a la superficie de nivel cero de g . Si llamamos Π al plano tangente de S en $\vec{x}$ recuerde entonces que el gradiente de g en $\vec{x}$ es perpendicular a Π .

Problema 1 (a)

Dado $\vec{x} \in S$ encuentre la normal unitaria exterior $\hat{n}$ de S en $\vec{x}$. Para ello use la función:

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 - 1$$

Note que S corresponde a la superficie de nivel cero de g . Si llamamos Π al plano tangente de S en $\vec{x}$ recuerde entonces que el gradiente de g en $\vec{x}$ es perpendicular a Π .

- Evidentemente S corresponde a la superficie de nivel cero de g pues los vectores tales que $g(x, y, z) = 0$ satisfacen la ecuación de S .

Problema 1 (a)

Dado $\vec{x} \in S$ encuentre la normal unitaria exterior $\hat{n}$ de S en $\vec{x}$. Para ello use la función:

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 - 1$$

Note que S corresponde a la superficie de nivel cero de g . Si llamamos Π al plano tangente de S en $\vec{x}$ recuerde entonces que el gradiente de g en $\vec{x}$ es perpendicular a Π .

- Evidentemente S corresponde a la superficie de nivel cero de g pues los vectores tales que $g(x, y, z) = 0$ satisfacen la ecuación de S .
- Siguiendo la indicación, para buscar un vector normal simplemente calculamos:

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a^2}, 2y, 2z \right)$$

Problema 1 (a)

Dado $\vec{x} \in S$ encuentre la normal unitaria exterior $\hat{n}$ de S en $\vec{x}$. Para ello use la función:

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 - 1$$

Note que S corresponde a la superficie de nivel cero de g . Si llamamos Π al plano tangente de S en $\vec{x}$ recuerde entonces que el gradiente de g en $\vec{x}$ es perpendicular a Π .

- Evidentemente S corresponde a la superficie de nivel cero de g pues los vectores tales que $g(x, y, z) = 0$ satisfacen la ecuación de S .
- Siguiendo la indicación, para buscar un vector normal simplemente calculamos:

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a^2}, 2y, 2z \right)$$

- Para que el vector quede unitario dividimos por su norma:

$$\hat{n} = \frac{\left(\frac{2x}{a^2}, 2y, 2z \right)}{\sqrt{\left(\frac{2x}{a^2} \right)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}$$

Problema 1 (a)

Dado $\vec{x} \in S$ encuentre la normal unitaria exterior $\hat{n}$ de S en $\vec{x}$. Para ello use la función:

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 - 1$$

Note que S corresponde a la superficie de nivel cero de g . Si llamamos Π al plano tangente de S en $\vec{x}$ recuerde entonces que el gradiente de g en $\vec{x}$ es perpendicular a Π .

- Evidentemente S corresponde a la superficie de nivel cero de g pues los vectores tales que $g(x, y, z) = 0$ satisfacen la ecuación de S .
- Siguiendo la indicación, para buscar un vector normal simplemente calculamos:

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a^2}, 2y, 2z \right)$$

- Para que el vector quede unitario dividimos por su norma:

$$\hat{n} = \frac{\left(\frac{2x}{a^2}, 2y, 2z \right)}{\sqrt{\left(\frac{2x}{a^2} \right)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}$$

Problema 1 (b)

Encuentre la ecuación de Π . Muestre que el vector $\vec{p} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$ verifica la ecuación de Π y que es perpendicular a este. Notar que $f = \vec{x} \cdot \hat{n}$ corresponde a la distancia entre el origen y Π .

Problema 1 (b)

Encuentre la ecuación de Π . Muestre que el vector $\vec{p} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$ verifica la ecuación de Π y que es perpendicular a este. Notar que $f = \vec{x} \cdot \hat{n}$ corresponde a la distancia entre el origen y Π .

- Por definición:

$$\Pi = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{y} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = 0\}$$

Problema 1 (b)

Encuentre la ecuación de Π . Muestre que el vector $\vec{p} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$ verifica la ecuación de Π y que es perpendicular a este. Notar que $f = \vec{x} \cdot \hat{n}$ corresponde a la distancia entre el origen y Π .

- Por definición:

$$\Pi = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{y} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = 0\}$$

- Para ver que $\vec{p}$ verifica la ecuación, simplemente reemplazamos:

$$(\vec{p} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = ((\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = \vec{x} \cdot \hat{n} - \vec{x} \cdot \hat{n} = 0$$

Luego $\vec{p}$ satisface.

Problema 1 (b)

Encuentre la ecuación de Π . Muestre que el vector $\vec{p} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$ verifica la ecuación de Π y que es perpendicular a este. Notar que $f = \vec{x} \cdot \hat{n}$ corresponde a la distancia entre el origen y Π .

- Por definición:

$$\Pi = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{y} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = 0\}$$

- Para ver que $\vec{p}$ verifica la ecuación, simplemente reemplazamos:

$$(\vec{p} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = ((\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = \vec{x} \cdot \hat{n} - \vec{x} \cdot \hat{n} = 0$$

Luego $\vec{p}$ satisface.

- $\vec{p}$ es perpendicular a Π porque tiene la misma dirección que $\hat{n}$.

Problema 1 (b)

Encuentre la ecuación de Π . Muestre que el vector $\vec{p} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$ verifica la ecuación de Π y que es perpendicular a este. Notar que $f = \vec{x} \cdot \hat{n}$ corresponde a la distancia entre el origen y Π .

- Por definición:

$$\Pi = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{y} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = 0\}$$

- Para ver que $\vec{p}$ verifica la ecuación, simplemente reemplazamos:

$$(\vec{p} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = ((\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = \vec{x} \cdot \hat{n} - \vec{x} \cdot \hat{n} = 0$$

Luego $\vec{p}$ satisface.

- $\vec{p}$ es perpendicular a Π porque tiene la misma dirección que $\hat{n}$.
- Para ver que f corresponde a la distancia entre el origen y Π recordar que podemos pensar el producto punto como:

$$\vec{x} \cdot \hat{n} = |\vec{x}||\hat{n}| \cos(\alpha) = |\vec{x}| \cos(\alpha)$$

Donde α es el ángulo comprendido entre $\vec{x}$ y $\hat{n}$.

Problema 1 (b)

Encuentre la ecuación de Π . Muestre que el vector $\vec{p} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$ verifica la ecuación de Π y que es perpendicular a este. Notar que $f = \vec{x} \cdot \hat{n}$ corresponde a la distancia entre el origen y Π .

- Por definición:

$$\Pi = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{y} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = 0\}$$

- Para ver que $\vec{p}$ verifica la ecuación, simplemente reemplazamos:

$$(\vec{p} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = ((\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = \vec{x} \cdot \hat{n} - \vec{x} \cdot \hat{n} = 0$$

Luego $\vec{p}$ satisface.

- $\vec{p}$ es perpendicular a Π porque tiene la misma dirección que $\hat{n}$.
- Para ver que f corresponde a la distancia entre el origen y Π recordar que podemos pensar el producto punto como:

$$\vec{x} \cdot \hat{n} = |\vec{x}||\hat{n}| \cos(\alpha) = |\vec{x}| \cos(\alpha)$$

Donde α es el ángulo comprendido entre $\vec{x}$ y $\hat{n}$.

Problema 1 (c)

Muestre que:

$$\int \int_S f dA = 4\pi a$$

Problema 1 (c)

Muestre que:

$$\int \int_S f dA = 4\pi a$$

Teorema de la divergencia de Gauss

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera es una superficie regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Entonces:

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

Problema 1 (c)

Muestre que:

$$\int \int_S f dA = 4\pi a$$

Teorema de la divergencia de Gauss

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera es una superficie regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Entonces:

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

- En nuestro caso:

$$\int \int_S f dA = \int \int \vec{x} \cdot \hat{n} dA$$

Problema 1 (c)

Muestre que:

$$\iint_S f dA = 4\pi a$$

Teorema de la divergencia de Gauss

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera es una superficie regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Entonces:

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

- En nuestro caso:

$$\int \int_S f dA = \int \int \vec{x} \cdot \hat{n} dA$$

- Por el teorema:

$$\int \int \vec{x} \cdot \hat{n} dA = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{x}) dV = 3 \int \int \int_{\Omega} dv = 3 \operatorname{vol}(\Omega)$$

Problema 1 (c)

Muestre que:

$$\int \int_S f dA = 4\pi a$$

Teorema de la divergencia de Gauss

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera es una superficie regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Entonces:

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

- En nuestro caso:

$$\int \int_S f dA = \int \int \vec{x} \cdot \hat{n} dA$$

- Por el teorema:

$$\int \int \vec{x} \cdot \hat{n} dA = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{x}) dV = 3 \int \int \int_{\Omega} dv = 3 \operatorname{vol}(\Omega)$$

- Se concluye recordando que el volumen de un elipsoide como el nuestro viene dado por (?):

$$\frac{4}{3}\pi a$$

Problema 1 (c)

Muestre que:

$$\int \int_S f dA = 4\pi a$$

Teorema de la divergencia de Gauss

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera es una superficie regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Entonces:

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

- En nuestro caso:

$$\int \int_S f dA = \int \int \vec{x} \cdot \hat{n} dA$$

- Por el teorema:

$$\int \int \vec{x} \cdot \hat{n} dA = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{x}) dV = 3 \int \int \int_{\Omega} dv = 3 \operatorname{vol}(\Omega)$$

- Se concluye recordando que el volumen de un elipsoide como el nuestro viene dado por (?):

$$\frac{4}{3}\pi a$$

Problema 1 (d)

Considere el campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a^2}, y, z \right)$$

Muestre que $\vec{F}$ es paralelo a $\hat{n}$.

Problema 1 (d)

Considere el campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a^2}, y, z \right)$$

Muestre que $\vec{F}$ es paralelo a $\hat{n}$.

- En efecto:

$$\frac{2\vec{F}}{\sqrt{\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}} = \hat{n}$$

Problema 1 (d)

Considere el campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a^2}, y, z \right)$$

Muestre que $\vec{F}$ es paralelo a $\hat{n}$.

- En efecto:

$$\frac{2\vec{F}}{\sqrt{\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}} = \hat{n}$$

- Es decir:

$$k\vec{F} = \hat{n}$$

Con $k \in \mathbb{R}$, por lo que $\vec{F}$ es paralelo a $\hat{n}$.

Problema 1 (d)

Considere el campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a^2}, y, z \right)$$

Muestre que $\vec{F}$ es paralelo a $\hat{n}$.

- En efecto:

$$\frac{2\vec{F}}{\sqrt{\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}} = \hat{n}$$

- Es decir:

$$k\vec{F} = \hat{n}$$

Con $k \in \mathbb{R}$, por lo que $\vec{F}$ es paralelo a $\hat{n}$.

Problema 1 (e)

Pruebe que $f = 1/(\vec{F} \cdot \hat{n})$ sobre S .

Problema 1 (e)

Pruebe que $f = 1/(\vec{F} \cdot \hat{n})$ sobre S .

- **Propuesto... :)**

Problema 1 (e)

Pruebe que $f = 1/(\vec{F} \cdot \hat{n})$ sobre S .

- **Propuesto... :)**

Problema 1 (f)

Muestre que:

$$\int \int_S \frac{1}{f} dA = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2a^2 + 1}{a} \right)$$

Problema 1 (f)

Muestre que:

$$\int \int_S \frac{1}{f} dA = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2a^2 + 1}{a} \right)$$

- Usando la parte anterior sabemos que:

$$\frac{1}{f} = \vec{F} \cdot \hat{n}$$

Problema 1 (f)

Muestre que:

$$\int \int_S \frac{1}{f} dA = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2a^2 + 1}{a} \right)$$

- Usando la parte anterior sabemos que:

$$\frac{1}{f} = \vec{F} \cdot \hat{n}$$

- Nuevamente por el teorema de Gauss:

$$\int \int_S \frac{1}{f} dA = \int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} = \int \int \int_{\Omega} \text{div}(\vec{F}) dV$$

Problema 1 (f)

Muestre que:

$$\int \int_S \frac{1}{f} dA = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2a^2 + 1}{a} \right)$$

- Usando la parte anterior sabemos que:

$$\frac{1}{f} = \vec{F} \cdot \hat{n}$$

- Nuevamente por el teorema de Gauss:

$$\int \int_S \frac{1}{f} dA = \int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

- En este caso:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{a^2} + 2$$

Problema 1 (f)

Muestre que:

$$\int \int_S \frac{1}{f} dA = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2a^2 + 1}{a} \right)$$

- Usando la parte anterior sabemos que:

$$\frac{1}{f} = \vec{F} \cdot \hat{n}$$

- Nuevamente por el teorema de Gauss:

$$\int \int_S \frac{1}{f} dA = \int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

- En este caso:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{a^2} + 2$$

- Y así:

$$\int \int_S \frac{1}{f} dA = \left(\frac{1}{a^2} + 2 \right) \int \int \int_{\Omega} dV = \left(\frac{1}{a^2} + 2 \right) \operatorname{vol}(\Omega) = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2a^2 + 1}{a} \right)$$

Problema 1 (f)

Muestre que:

$$\int \int_S \frac{1}{f} dA = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2a^2 + 1}{a} \right)$$

- Usando la parte anterior sabemos que:

$$\frac{1}{f} = \vec{F} \cdot \hat{n}$$

- Nuevamente por el teorema de Gauss:

$$\int \int_S \frac{1}{f} dA = \int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

- En este caso:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{a^2} + 2$$

- Y así:

$$\int \int_S \frac{1}{f} dA = \left(\frac{1}{a^2} + 2 \right) \int \int \int_{\Omega} dV = \left(\frac{1}{a^2} + 2 \right) \operatorname{vol}(\Omega) = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2a^2 + 1}{a} \right)$$

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

Condiciones de Cauchy-Riemann

Una función de variable compleja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 \in \Omega$ ssi es derivable en (x_0, y_0) como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y además se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

En tal caso:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

Condiciones de Cauchy-Riemann

Una función de variable compleja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 \in \Omega$ ssi es derivable en (x_0, y_0) como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y además se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

En tal caso:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Queremos usar las condiciones de C-R, así que comenzamos por escribir f en términos de x, y . En nuestro caso, para $z = x + iy$:

$$f(z) = 2xy + i\sqrt{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y)$$

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Queremos usar las condiciones de C-R, así que comenzamos por escribir f en términos de x, y . En nuestro caso, para $z = x + iy$:

$$f(z) = 2xy + i\sqrt{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y)$$

- Derivamos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 2y, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Queremos usar las condiciones de C-R, así que comenzamos por escribir f en términos de x, y . En nuestro caso, para $z = x + iy$:

$$f(z) = 2xy + i\sqrt{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y)$$

- Derivamos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 2y, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

- Las condiciones de C-R imponen que:

$$2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 2x = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Queremos usar las condiciones de C-R, así que comenzamos por escribir f en términos de x, y . En nuestro caso, para $z = x + iy$:

$$f(z) = 2xy + i\sqrt{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y)$$

- Derivamos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 2y, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

- Las condiciones de C-R imponen que:

$$2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 2x = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- Usando estas dos identidades:

$$2xy = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -2xy \Rightarrow xy = 0$$

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Queremos usar las condiciones de C-R, así que comenzamos por escribir f en términos de x, y . En nuestro caso, para $z = x + iy$:

$$f(z) = 2xy + i\sqrt{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y)$$

- Derivamos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 2y, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

- Las condiciones de C-R imponen que:

$$2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 2x = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- Usando estas dos identidades:

$$2xy = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -2xy \Rightarrow xy = 0$$

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Para que $xy = 0$ necesariamente debe ocurrir que:

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Para que $xy = 0$ necesariamente debe ocurrir que:
 - ❶ $x = 0$ e $y = 0$:

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Para que $xy = 0$ necesariamente debe ocurrir que:

- ❶ $x = 0$ e $y = 0$:

Pero en este caso la función queda mal definida (división por cero).

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Para que $xy = 0$ necesariamente debe ocurrir que:

- ① $x = 0$ e $y = 0$:

Pero en este caso la función queda mal definida (división por cero).

- ② $x = 0$ e $y \neq 0$:

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Para que $xy = 0$ necesariamente debe ocurrir que:

① $x = 0$ e $y = 0$:

Pero en este caso la función queda mal definida (división por cero).

② $x = 0$ e $y \neq 0$:

Luego, de la primera condición de C-R:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$$

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Para que $xy = 0$ necesariamente debe ocurrir que:

❶ $x = 0$ e $y = 0$:

Pero en este caso la función queda mal definida (división por cero).

❷ $x = 0$ e $y \neq 0$:

Luego, de la primera condición de C-R:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$$

❸ $x \neq 0$ e $y = 0$:

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Para que $xy = 0$ necesariamente debe ocurrir que:

- ① $x = 0$ e $y = 0$:

Pero en este caso la función queda mal definida (división por cero).

- ② $x = 0$ e $y \neq 0$:

Luego, de la primera condición de C-R:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$$

- ③ $x \neq 0$ e $y = 0$:

Y de la segunda condición de C-R:

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Para que $xy = 0$ necesariamente debe ocurrir que:

① $x = 0$ e $y = 0$:

Pero en este caso la función queda mal definida (división por cero).

② $x = 0$ e $y \neq 0$:

Luego, de la primera condición de C-R:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$$

③ $x \neq 0$ e $y = 0$:

Y de la segunda condición de C-R:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2}$$

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Para que $xy = 0$ necesariamente debe ocurrir que:

① $x = 0$ e $y = 0$:

Pero en este caso la función queda mal definida (división por cero).

② $x = 0$ e $y \neq 0$:

Luego, de la primera condición de C-R:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$$

③ $x \neq 0$ e $y = 0$:

Y de la segunda condición de C-R:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2}$$

Lo que no puede ocurrir.

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Para que $xy = 0$ necesariamente debe ocurrir que:

① $x = 0$ e $y = 0$:

Pero en este caso la función queda mal definida (división por cero).

② $x = 0$ e $y \neq 0$:

Luego, de la primera condición de C-R:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$$

③ $x \neq 0$ e $y = 0$:

Y de la segunda condición de C-R:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2}$$

Lo que no puede ocurrir.

- Luego, la función será derivable cuando $x = 0$ e $y = \pm \frac{1}{2}$, es decir, para $z = \pm i\frac{1}{2}$.

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Para que $xy = 0$ necesariamente debe ocurrir que:

① $x = 0$ e $y = 0$:

Pero en este caso la función queda mal definida (división por cero).

② $x = 0$ e $y \neq 0$:

Luego, de la primera condición de C-R:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$$

③ $x \neq 0$ e $y = 0$:

Y de la segunda condición de C-R:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2}$$

Lo que no puede ocurrir.

- Luego, la función será derivable cuando $x = 0$ e $y = \pm \frac{1}{2}$, es decir, para $z = \pm i\frac{1}{2}$.
- Del teorema de las condiciones de C-R sigue que:

$$f'\left(\frac{i}{2}\right) = 1, \quad f'\left(-\frac{i}{2}\right) = -1$$

Problema 2 (a)

Estudie la derivabilidad de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Y calcule $f'(z)$ cuando exista.

- Para que $xy = 0$ necesariamente debe ocurrir que:

① $x = 0$ e $y = 0$:

Pero en este caso la función queda mal definida (división por cero).

② $x = 0$ e $y \neq 0$:

Luego, de la primera condición de C-R:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$$

③ $x \neq 0$ e $y = 0$:

Y de la segunda condición de C-R:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2}$$

Lo que no puede ocurrir.

- Luego, la función será derivable cuando $x = 0$ e $y = \pm \frac{1}{2}$, es decir, para $z = \pm i\frac{1}{2}$.
- Del teorema de las condiciones de C-R sigue que:

$$f'\left(\frac{i}{2}\right) = 1, \quad f'\left(-\frac{i}{2}\right) = -1$$

Problema 2 (b)

Determine los ceros y polos (con sus órdenes) de la función:

$$f(z) = \frac{e^{2z} \sin(z)}{z^3(z+i)}$$

Problema 2 (b)

Determine los ceros y polos (con sus órdenes) de la función:

$$f(z) = \frac{e^{2z} \sin(z)}{z^3(z+i)}$$

- Busquemos primero los ceros de la función. Es decir, aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que:

$$f(z) = 0$$

Problema 2 (b)

Determine los ceros y polos (con sus órdenes) de la función:

$$f(z) = \frac{e^{2z} \sin(z)}{z^3(z+i)}$$

- Busquemos primero los ceros de la función. Es decir, aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que:

$$f(z) = 0$$

Como $e^{2z} \neq 0$, para que z sea un cero nos basta que:

$$\sin(z) = 0 \quad \wedge \quad z^3(z+i) \neq 0$$

Problema 2 (b)

Determine los ceros y polos (con sus órdenes) de la función:

$$f(z) = \frac{e^{2z} \sin(z)}{z^3(z+i)}$$

- Busquemos primero los ceros de la función. Es decir, aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que:

$$f(z) = 0$$

Como $e^{2z} \neq 0$, para que z sea un cero nos basta que:

$$\sin(z) = 0 \quad \wedge \quad z^3(z+i) \neq 0$$

Para que se cumpla lo primero, $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 2 (b)

Determine los ceros y polos (con sus órdenes) de la función:

$$f(z) = \frac{e^{2z} \sin(z)}{z^3(z+i)}$$

- Busquemos primero los ceros de la función. Es decir, aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que:

$$f(z) = 0$$

Como $e^{2z} \neq 0$, para que z sea un cero nos basta que:

$$\sin(z) = 0 \quad \wedge \quad z^3(z+i) \neq 0$$

Para que se cumpla lo primero, $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Sin embargo, para que se cumpla lo segundo, $z \neq 0$.

Problema 2 (b)

Determine los ceros y polos (con sus órdenes) de la función:

$$f(z) = \frac{e^{2z} \sin(z)}{z^3(z+i)}$$

- Busquemos primero los ceros de la función. Es decir, aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que:

$$f(z) = 0$$

Como $e^{2z} \neq 0$, para que z sea un cero nos basta que:

$$\sin(z) = 0 \quad \wedge \quad z^3(z+i) \neq 0$$

Para que se cumpla lo primero, $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Sin embargo, para que se cumpla lo segundo, $z \neq 0$.

Luego, los ceros de la función son todos aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Problema 2 (b)

Determine los ceros y polos (con sus órdenes) de la función:

$$f(z) = \frac{e^{2z} \sin(z)}{z^3(z+i)}$$

- Busquemos primero los ceros de la función. Es decir, aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que:

$$f(z) = 0$$

Como $e^{2z} \neq 0$, para que z sea un cero nos basta que:

$$\sin(z) = 0 \quad \wedge \quad z^3(z+i) \neq 0$$

Para que se cumpla lo primero, $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Sin embargo, para que se cumpla lo segundo, $z \neq 0$.

Luego, los ceros de la función son todos aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

- Los polos de la función son:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -i$$

El primero de orden 2 y el segundo de orden 1.

Problema 2 (b)

Determine los ceros y polos (con sus órdenes) de la función:

$$f(z) = \frac{e^{2z} \sin(z)}{z^3(z+i)}$$

- Busquemos primero los ceros de la función. Es decir, aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que:

$$f(z) = 0$$

Como $e^{2z} \neq 0$, para que z sea un cero nos basta que:

$$\sin(z) = 0 \quad \wedge \quad z^3(z+i) \neq 0$$

Para que se cumpla lo primero, $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Sin embargo, para que se cumpla lo segundo, $z \neq 0$.

Luego, los ceros de la función son todos aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

- Los polos de la función son:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -i$$

El primero de orden 2 y el segundo de orden 1.

Verificar con las definiciones!

Problema 2 (b)

Determine los ceros y polos (con sus órdenes) de la función:

$$f(z) = \frac{e^{2z} \sin(z)}{z^3(z+i)}$$

- Busquemos primero los ceros de la función. Es decir, aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que:

$$f(z) = 0$$

Como $e^{2z} \neq 0$, para que z sea un cero nos basta que:

$$\sin(z) = 0 \quad \wedge \quad z^3(z+i) \neq 0$$

Para que se cumpla lo primero, $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Sin embargo, para que se cumpla lo segundo, $z \neq 0$.

Luego, los ceros de la función son todos aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

- Los polos de la función son:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -i$$

El primero de orden 2 y el segundo de orden 1.

Verificar con las definiciones!