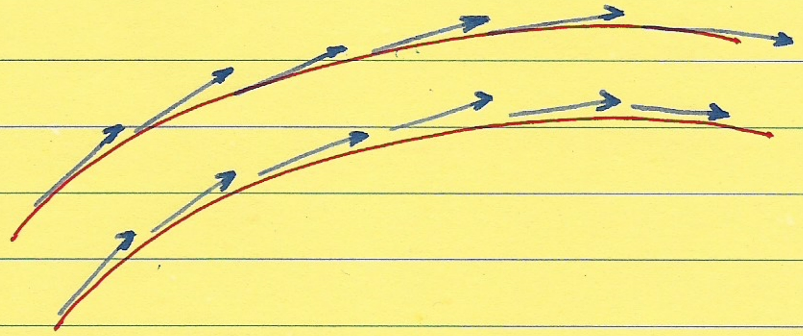
(6) (Líneas de corriente) Sea $\vec{v} : \Omega \times [0,T] \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ un cpo. vectorial, que imaginaremos es el cpo. de velocidades $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t)$ de un líquido confinado en Ω. Fijemos una partícula P de este fluido y sigámosla en su movimiento. Nos preguntamos por la trayectoria descrita por P. Desde un pto. de vista geométrico, nos preguntamos por la curva que en todo instante su vector tangente coincide con la velocidad de P. Así, las líneas de corriente son las curvas $\vec{r} : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$;

(Sistema de edo's no lineal) $$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}\,'(t) = \vec{v}(\vec{r}(t),t) \quad \forall t \in (0,T) \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \ (\text{posición de } P \text{ en } t=0) \end{cases}$$

En el laboratorio, las líneas de corriente se pueden visualizar vertiendo un trazador (leche condensada, por ejemplo) en el volumen Ω.



Ejemplos y Ejercicios

(a) $\vec{v} = (-y, x)$, indep. de $t \geq 0$

Buscamos $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ tal que

$$\begin{cases} \vec{r}\,'(t) = \vec{v}(\vec{r}(t)) = (-y(t), x(t)) \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \text{ (cond. inicial)} \end{cases}$$

Así,

$$(+)\begin{cases} x'(t) = -y(t) & /\cdot x(t) \\ y'(t) = x(t) & /\cdot y(t) \end{cases}$$

$$x'x + y'y = 0 \iff$$

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)' = 0 \iff$$

$$x^2+y^2 = c^{te},$$

y así, las líneas de corriente son circunferencias concéntricas, que se determinan por la condición inicial.

(b) (Ejercicio) Encontrar las líneas de corriente del campo $\vec{v} = \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}\right)$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2}$, para $r \neq 0$.

El operador gradiente como dirección de máximo ascenso/descenso

$\rho : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ cpo. escalar, diferenciable en $\vec{r}_0 \in \Omega$. Para una dirección $\hat{d}$ en $\mathbb{R}^N$ ($\|\hat{d}\|=1$), sea

$$g(t) = g(t;\hat{d}) \overset{(def)}{=} \rho(\vec{r}_0 + t\hat{d}) \quad \forall t \text{ en vecindad de } 0.$$

La variación instantánea (o tasa de) de ρ en la dirección $\hat{d}$ en $\vec{r}_0$ es $g'(0)$, i.e., $\nabla\rho(\vec{r}_0)\cdot\hat{d}$. Ahora bien, esta cantidad es máxima en valor absoluto cuando $\nabla\rho(\vec{r}_0)$ y $\hat{d}$ son proporcionales (desigualdad de Cauchy-Schwarz). Así, si $\nabla\rho(\vec{r}_0) \neq \vec{0}$, la máxima variación se obtiene en las direcciones:

$$\hat{d} = \pm \frac{\nabla\rho(\vec{r}_0)}{\|\nabla\rho(\vec{r}_0)\|} \qquad (*)$$

Suponga ahora que ρ es la temperatura del medio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, digamos $\rho = T$, y sea $\vec{q} = \vec{q}(\vec{r})$, $\vec{r} \in \Omega$, el flujo de calor o velocidad de propagación del calor (generado por una fuente de calor fija, digamos una estufa). Basado en $(*)$ para $\rho = T$, J. B. Fourier promulgó la ley:

$$\vec{q}(\vec{r}_0) \propto \nabla T(\vec{r}_0)$$

y la constante de proporcionalidad dependiendo del medio Ω; mide la capacidad de conducir calor, se lo denomina coef. de conductividad térmica, y se denota $c = c(\vec{r}) > 0$.

una expresión explícita de $g'(0)$ dependiendo del ángulo entre $\nabla\rho(\vec{r_0})$ y $\hat{d}$ es

$$g'(0) = \nabla\rho(\vec{r_0})\cdot\hat{d} = |\nabla\rho(\vec{r_0})|\cos(\underbrace{\measuredangle(\nabla\rho(\vec{r_0}),\hat{d})}_{=\theta})$$

Así, $g'(0)$ es máxima cuando $\cos\theta = 1$, i.e, $\theta = 0$, y es mínima cuando $\cos\theta = -1$, i.e, $\theta = \pi$. Se concluye que $\nabla\rho(\vec{r_0})$ es la dirección de máximo ascenso de ρ y $-\nabla\rho(\vec{r_0})$ de máximo descenso. En la ley de Fourier, como el calor viaja desde las temperaturas mayores a las bajas, podemos precisar la proporcionalidad, y escribir:

$$\vec{q}(\vec{r_0}) = c(\vec{r_0})(-\nabla T(\vec{r_0})).$$

— <u>Sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales</u>

Se trata de introducir nuevos sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^N$ ($N=2$ o 3) lo mejor adaptados posible a los fenómenos físicos/ingenieriles en estudio, coordenadas como las polares en $\mathbb{R}^2$ o esféricas o cilíndricas en $\mathbb{R}^3$. Generalizaremos también el concepto de triedro $\{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\}$, asociado al sistema cartesiano de coordenadas.

El punto de partida es introducir la noción de cambio de variable: $\vec{r}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un <u>cambio de variables</u> o un <u>sistema curvilíneo de coordenadas</u> en $\mathbb{R}^3$ si $\vec{r}$ es una fn. invertible (biyectiva), a cada $(u,v,w)\in D$ le corresponde un único punto

$\vec{r}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ y cada

$\vec{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ proviene de un único $(u,v,w) \in D$, y que además es diferenciable en todo pto. $(u,v,w) \in D$ y su jacobiano $J_{\vec{r}}$ es no-singular, esto es,

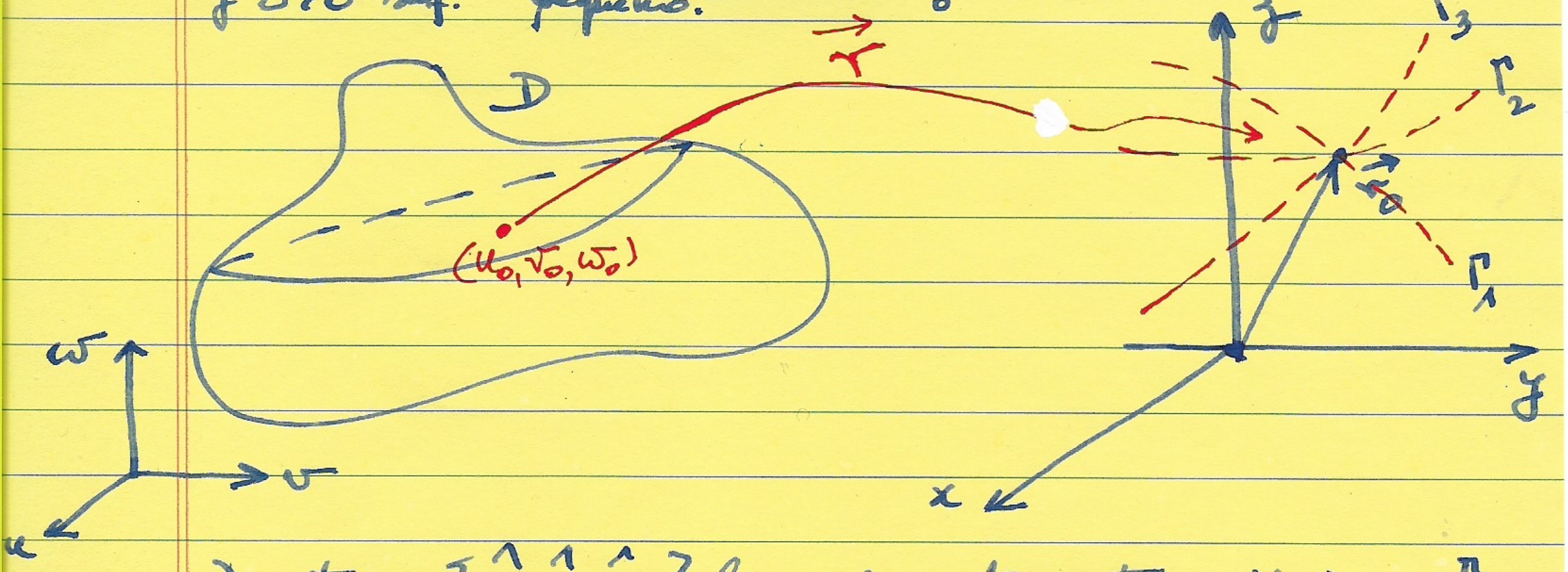
$$\det \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \,\Big|\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \,\Big|\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right] \neq 0 .$$

Ejemplo: $D = \mathbb{R}^3$, $\vec{r} = id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, y así $J_{\vec{r}} = I$.

Triedro $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ Fijemos $(u_0, v_0, w_0) \in D$ y consideremos las 3 curvas siguientes:

$$\Gamma_1 : u \in (u_0 - \delta, u_0 + \delta) \longmapsto \vec{r}(u, v_0, w_0) \text{ con } (u, v_0, w_0) \in D$$
$$\Gamma_2 : v \in (v_0 - \delta, v_0 + \delta) \longmapsto \vec{r}(u_0, v, w_0) \text{ con } (u_0, v, w_0 \in D$$
$$\Gamma_3 : w \in (w_0 - \delta, w_0 + \delta) \longmapsto \vec{r}(u_0, v_0, w) \text{ con } (u_0, v_0, w) \in D$$

y $\delta > 0$ suf.$^{\text{nte}}$ pequeño. Denotemos $\vec{r}_0 = \vec{r}(u_0, v_0, w_0)$.



Denotemos $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ los vectores tangentes unitarios a Γ_1, Γ_2, Γ_3 en $\vec{r}_0 = \vec{r}(u_0, v_0, w_0)$ (que pueden, por cierto, depender de (u_0, v_0, w_0), pero, no lo explicitaremos para no recargar la notación). Así,

$$\hat{u} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right\|}, \quad \hat{v} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\|}, \quad \hat{w} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}}{\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right\|}.$$

Los términos de normalización $h_u \overset{(def)}{=} \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right\|$, $h_v \overset{(def)}{=} \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\|$ y $h_w \overset{(def)}{=} \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right\|$ se denominan los <u>factores métricos escalares</u>; son todos no nulos, pues $J_{\vec{r}}(\vec{r}_0)$ es no-singular.

<u>def.</u>— Si $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ son mutua$^{\text{mte}}$ ortogonales $\forall (u_0, v_0, w_0) \in D$, se dice que $\vec{r}(\cdot,\cdot,\cdot)$ es un <u>sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal</u>.

<u>Ejemplos</u> (1) (Esféricas) $D = [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$

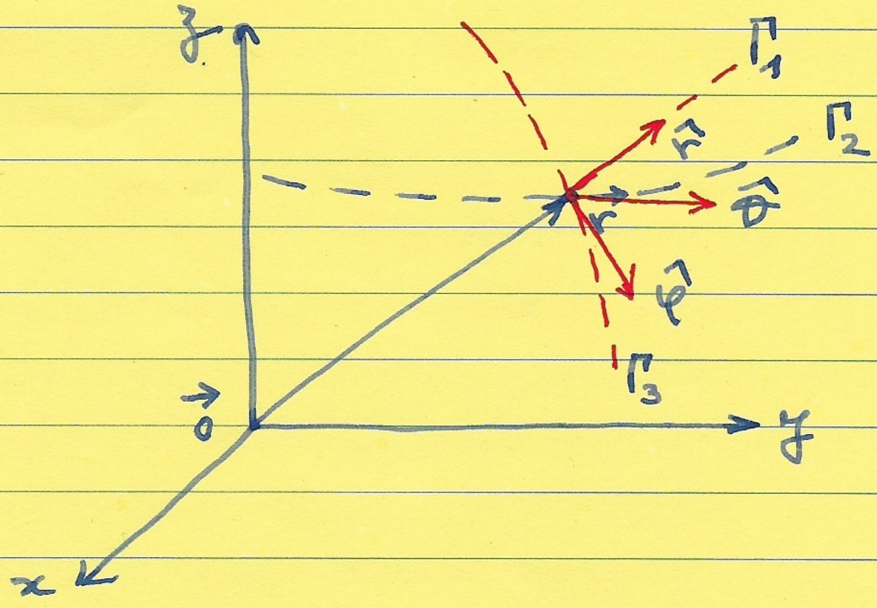
$$\vec{r}(r, \theta, \varphi) = (r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \cos\varphi) \Rightarrow h_r = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right\| = 1$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, 0) \Rightarrow h_\theta = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right\| = r\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\cos\theta, -r\operatorname{sen}\varphi) \Rightarrow h_\varphi = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right\| = r$$

y entonces
$$\hat{r} = (\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \cos\varphi)$$
$$\hat{\theta} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$$
$$\hat{\varphi} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\cos\theta, -\operatorname{sen}\varphi)$$

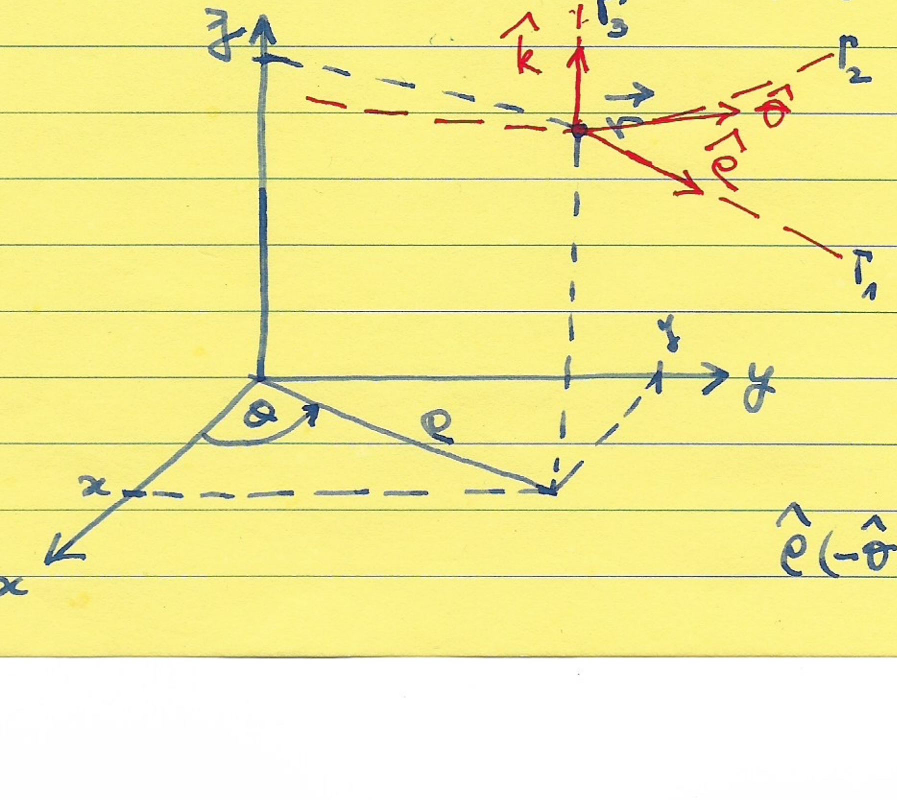


Se chequea fácil$^{\text{mte}}$ que es ortogonal. Para calcular los productos cruces entre ellos, se puede usar la regla de la mano derecha o la secuencia usual: $\hat{\varphi}\,\hat{\theta}\,\hat{r}\,\hat{\varphi}\,\hat{\theta}$.

<u>Ejercicio</u>.– Compute el triedro $\{\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z}\}$ para cilíndricas, y pruebe que

$$h_\rho = 1, \quad h_\theta = \rho, \quad h_z = 1$$

$$\hat{\rho} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0), \quad \hat{\theta} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0), \quad \hat{z} = \hat{k}$$



$\hat{\rho}\,(-\hat{\theta})\,\hat{z}\,\hat{\rho}\,(-\hat{\theta})$.

Operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas ortogonales

Suponga que un determinado cpo., digamos ρ, lo conocemos en coordenadas (u,v,w), digamos $\rho=\tilde{\rho}(u,v,w)$; $\tilde{\rho}$ es la ley de composición de ρ a partir de (u,v,w). Nos preguntamos ¿cómo calcular los operadores diferenciales asociados al cpo. ρ?

Para ello, debemos componer ρ a partir de $\vec{r}=(x,y,z)$, lo que se obtiene simplemente componiendo con el cambio de variables desde (u,v,w) a (x,y,z), y que seguimos denotando $\vec{r}$, mientras no haya confusión. Esto es, escribimos

$$\rho = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ley de composición de } \rho \\ \text{desde Cartesianas, no conocida a priori}}}{\rho(x,y,z)} = \rho(\vec{r}(u,v,w)) = \underbrace{\rho\circ\vec{r}}_{\text{ley conocida, es } \tilde{\rho}}(u,v,w)$$

<u>Ejemplo</u>.- $\rho=\frac{1}{r}$ en esféricas, ie, $\rho=\tilde{\rho}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r}$.

Luego,

$$\rho=\rho(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=(\rho\circ\vec{r})(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r}.$$

Cálculo de $\nabla\rho=\left(\frac{\partial\rho}{\partial x},\frac{\partial\rho}{\partial y},\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)(\vec{r})$

Usando que $\{\hat{u},\hat{v},\hat{w}\}$ es ortonormal, podemos descomponer $\nabla\rho(\vec{r})$ como:

$$\nabla\rho(\vec{r})=\left(\nabla\rho(\vec{r})\cdot\hat{u}\right)\hat{u}+\left(\nabla\rho(\vec{r})\cdot\hat{v}\right)\hat{v}+\left(\nabla\rho(\vec{r})\cdot\hat{w}\right)\hat{w}$$

Pero, por la definición de h_u y la regla de la cadena,

$$(\nabla\varphi(\vec{r})\cdot\hat{u}) = \frac{1}{h_u}\nabla\varphi(\vec{r})\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\underbrace{(\varphi\circ\vec{r})}_{\tilde{\varphi}}$$

y entonces

$$\boxed{\nabla\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial w}\hat{w}}$$

Ejemplos.— (1) $\varphi = \tilde{\varphi}(r) = \frac{1}{r}$ en esféricas

Sabemos que $h_r = 1$, $h_\theta = r\operatorname{sen}\varphi$, $h_\varphi = r$. Así,

$$\nabla\varphi(\vec{r}) = 1\cdot\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}\hat{r} + 0 + 0 = \frac{-1}{r^2}\hat{r}$$

(2) En cilíndricas, los factores escalares son $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_z = 1$. Entonces para $\varphi = \tilde{\varphi}(\rho,\theta,z)$, se tiene

$$\nabla\varphi(\vec{r}) = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta}\hat{\theta} + 1\cdot\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z}\hat{k}$$

Por ejemplo, si $\varphi = \frac{1}{\rho}$, entonces $\nabla\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\rho^2}\hat{\rho}$.

(3) En coordenadas curvilíneas ortogonales generales, tenemos que si $\varphi = u$, entonces $\nabla\varphi = \nabla u = \frac{\hat{u}}{h_u}$, y análogamente, $\nabla v = \frac{\hat{v}}{h_v}$, $\nabla w = \frac{\hat{w}}{h_w}$.

(4) Entregar la lista de ejercicios #1 (subir a UCurso)

(5) (Ejercicio #1 de la lista) Suponga $\vec{v}$ se conoce en cilíndricas, digamos
$$\vec{v} = v_\rho(\rho,\theta,z)\hat{\rho} + v_\theta(\rho,\theta,z)\hat{\theta} + v_z(\rho,\theta,z)\hat{k},$$
entonces
$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\rho) + \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \rho\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]$$

<u>Dem.</u>— Recordemos que
$$\vec{x}(\rho,\theta,z) = (x,y,z) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z)$$
y que $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \operatorname{artg}(y/x)$ y que

$\hat{\rho} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, $\hat{\theta} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$, $\hat{z} = \hat{k}$. Luego,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{v} &= \operatorname{div}(v_\rho\hat{\rho} + v_\theta\hat{\theta} + v_z\hat{k}) \\ &= \operatorname{div}(v_\rho\cos\theta - v_\theta\operatorname{sen}\theta,\ v_\rho\operatorname{sen}\theta + v_\theta\cos\theta,\ v_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(v_\rho\cos\theta - v_\theta\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial}{\partial y}(v_\rho\operatorname{sen}\theta + v_\theta\cos\theta) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}$$

Ahora bien,

- $$\frac{\partial}{\partial x}(v_\rho\cos\theta - v_\theta\operatorname{sen}\theta) = \left[\frac{\partial v_\rho}{\partial\rho}\cos\theta + \frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}\frac{(-\operatorname{sen}\theta)}{\rho}\right]\cos\theta + v_\rho(-\operatorname{sen}\theta)\cdot\left(\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\rho}\right)$$

$$\left[\text{requiere de: } \frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos\theta,\ \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{1}{\rho^2}(-y) = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\right]$$

$$-\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial\rho}\underbrace{\frac{x}{\rho}}_{\cos\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\left(\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\rho}\right)\right]\operatorname{sen}\theta - v_\theta\cos\theta\left(\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\rho}\right)$$

$$\bullet\ \frac{\partial}{\partial y}\left(v_\rho \operatorname{sen}\theta + v_\theta \cos\theta\right) = \left[\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho}\frac{\overset{\operatorname{sen}\theta}{y}}{\rho} + \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}\right]\operatorname{sen}\theta + v_\rho(\cos\theta)\frac{\cos\theta}{\rho} +$$

$$\left[\text{usar que: } \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \operatorname{sen}\theta,\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos\theta}{\rho}\right]$$

$$+\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial \rho}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}\right]\cos\theta + v_\theta(-\operatorname{sen}\theta)\frac{\cos\theta}{\rho}$$

y sumando,

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta}\left[\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right] + \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta}\left[-\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\rho} + \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\rho}\right]$$

$$+\frac{\partial v_\theta}{\partial \rho}\left[-\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right] + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\left[+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\rho} + \frac{\cos^2\theta}{\rho}\right]$$

$$+\frac{v_\rho}{\rho}\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) + \frac{v_\theta}{\rho}\left(\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v_\rho \rho}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

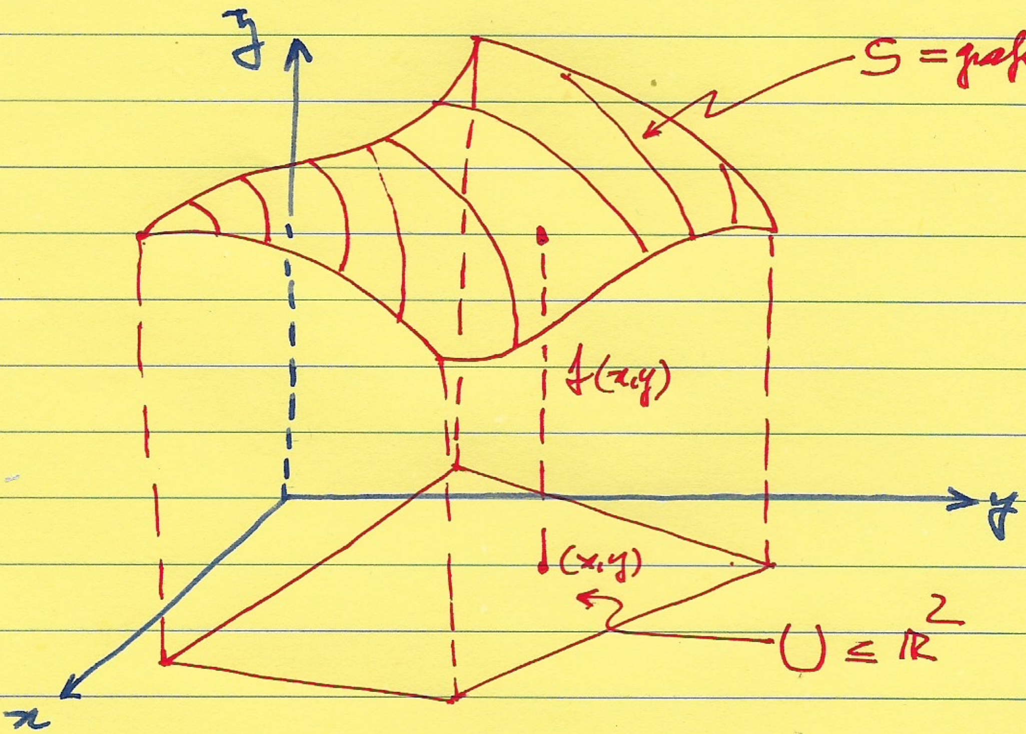
$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho v_\rho) + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \rho\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]. \blacksquare$$

La fórmula para el rotor es similar (cf. lista de ejercicios #1)

MA2002 Secs. 01 & 06 Viernes 23 de Septiembre de 2022

- Un ejemplo muy simple de superficie S parametrizable es el caso en que S es el grafo de una función escalar, de de dos variables, digamos $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Una parametrización obvia es:

$$\vec{\sigma}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \in U \longmapsto \vec{\sigma}(x,y) = (x, y, f(x,y))$$



- Recordemos que si S es una superficie regular (esto es, existe una parametrización $\vec{\sigma}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^N$ de S, de clase $\mathcal{C}^1(U)$, y que $\forall (u,v) \in U$, los vectores tangentes $\vec{T}_u$ y $\vec{T}_v$ son

$N=2,3$ l.i., esto es, $\vec{T}_u \times \vec{T}_v \neq \vec{0}$) y si $\rho: \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar definido y continuo en Ω, que contiene S, la **integral de superficie de ρ sobre S**, denotada $\iint_S \rho \, dA$, se define por:

$$\iint_S \rho\, dA \overset{(\text{def})}{=} \iint_U \rho(\vec{\sigma}(u,v)) \underbrace{\left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv}_{\text{elemento de área } dA}$$

Si $\rho \equiv 1$, $\iint_S \rho\, dA$ representa el área de S, y si ρ es la densidad superficial del material del que está hecho S, entonces $\iint_S \rho\, dA$ es la masa total M de S.

__def.__ — Se llama <u>centro de masa</u> de S al punto $\vec{r}_G = (x_G, y_G, z_G)$ donde

$$x_G \overset{(\text{def})}{=} \frac{1}{M} \iint_S (x\rho)\, dA, \quad y_G \overset{(\text{def})}{=} \iint_S (y\rho)\, dA, \ldots$$

- <u>Ejemplos y Ejercicios</u>

(1) Calcule la superficie o área de la esfera de radio $R > 0$.

Usando esféricas, esta superficie se parametriza claramente como sigue:

$$\vec{\sigma} : [0, 2\pi) \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \varphi) \longmapsto \vec{\sigma}(\theta, \varphi) = (R \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, R \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, R\cos\varphi)$$

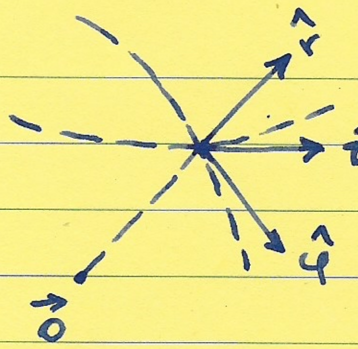
Ahora bien,

$$\text{área}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \varphi} \right\| d\varphi\, d\theta$$

Pero,

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} = R \operatorname{sen}\varphi (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) = R \operatorname{sen}\varphi\, \hat{\theta}$$

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \varphi} = R (\cos\varphi \cos\theta, \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\varphi) = R \hat{\varphi}$$



$\hat\varphi\ \hat\theta\ \hat r\ \hat\varphi\ \hat\theta$

$$\hat\theta \times \hat\varphi = -\hat r$$

Así,

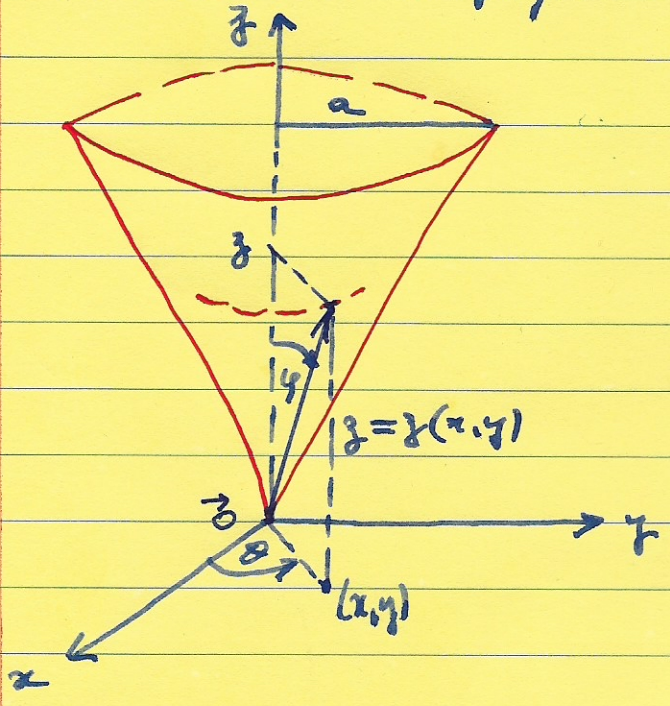
$$\text{área}(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \| R\,\text{sen}\varphi\,\hat\theta \times R\hat\varphi \|\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\, |\text{sen}\varphi|\, d\varphi\, d\theta = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \text{sen}\varphi\, d\varphi = 2\pi R^2 (1+1) =$$

$$= 4\pi R^2.$$

(2) Estudiemos diferentes parametrizaciones para el manto de un cono de altura h, radio mayor a y vértice en $\vec 0$

<u>Cartesianas</u>: Escojamos $(x,y) \in B(0,a)$ como parámetros. Luego, estamos en el caso en que S es el grafo de una función $z = z(x,y)$, donde $z(x,y)$ es la altura del punto donde la vertical desde (x,y) penetra el manto (ver figura).



La condición de cono es que el ángulo φ es constante sobre el manto. Precisamente,

$$tg(\varphi) = \frac{\text{c. opuesto}}{\text{c. adyacente}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{a}{h}$$

y entonces

$$z = z(x,y) = \frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$$

Ahora bien, $\varphi = c^{te} \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \wedge \cos\varphi = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$
y así,

$$tg(\varphi) = \frac{a}{h}.$$

Cilíndricas : los parámetros más adecuados son (ρ,θ) en $U = [0,a]\times[0,2\pi)$ y la parametrización sería:

$$\vec{\sigma}_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\rho,\theta) \longmapsto \vec{\sigma}_2(\rho,\theta) = \left(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \frac{h}{a}\rho\right)$$

Esféricas.— Escojamos como parámetros a $(r,\theta) \in U = [0,\sqrt{a^2+h^2}\,]\times[0,2\pi)$ y la parametrización es:

$$\vec{\sigma}_3(r,\theta) = \left(r\cos\theta \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}}_{\operatorname{sen}\varphi}, r\operatorname{sen}\theta \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}}_{\operatorname{sen}\varphi}, r\underbrace{\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}}_{\cos\varphi}\right)$$

Nota.— Las parametrizaciones $\vec{\sigma}_2$ y $\vec{\sigma}_3$ son de clase C^∞, mientras que $\vec{\sigma}_1$ es sólo de clase C^0. Es fácil convencerse que S no es regular, pues en el origen no hay plano tangente.

- Integral de flujo

def.— Sea S una superficie regular $\underbrace{}_{\text{en todo punto}}$. Se dice que S es orientable si es posible definir sobre ella un campo de normales $\hat{N} : S \to \mathbb{R}^3$, que sea continuo.

Así, una superficie S es orientable cuando es regular en todo punto, y $\hat{N}$ depende continua$^{\underline{\text{mte}}}$ de $(u,v) \in U$. Recordemos que

$$\hat{N} = \hat{N}(u,v) = \frac{\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \right\|}.$$

En una superficie orientable, el campo $\hat{N}$ define una orientación de S, mientras que $-\hat{N}$ define la opuesta. Intuitiva$^{\underline{\text{mte}}}$, S posee dos caras, opuestas.

Ejemplo.- La esfera $S(0,R)$ puede orientarse según $\hat{r}$ o según $-\hat{r}$, en esféricas. En efecto, pruebe como ejercicio que sobre $S(0,R)$,

$$\hat{N} = \frac{\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \varphi} \right\|} = \hat{r}.$$

def.- Sean S una superficie orientable según un campo de normales $\hat{N}: S \to \mathbb{R}^3$, continuo, y $\vec{v}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un campo vectorial continuo y definido en una región Ω, que suponemos contiene S. La integral de flujo de $\vec{v}$ sobre S, denotada $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{A}$, se define por:

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{A} \overset{(\text{def})}{=} \iint_S \vec{v} \cdot \underbrace{\hat{N}\, dA}_{\overset{(\text{def})}{=} d\vec{A}} = \iint_U \vec{v}(\vec{\sigma}(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \right] du\, dv.$$

- Si hubiese tiempo hacer un ejemplo.