MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 13: Funciones Complejas, C-R y Series

30 de noviembre de 2021

P1. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, entorno a $z_0 = 0, -1, i$, también dibuje los discos de convergencia y relacione las distancias de los z_0 con $z = 1$.

P2. Calcule los radios de convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2^n) z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (log(n))^2 z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z+2)^{2^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$

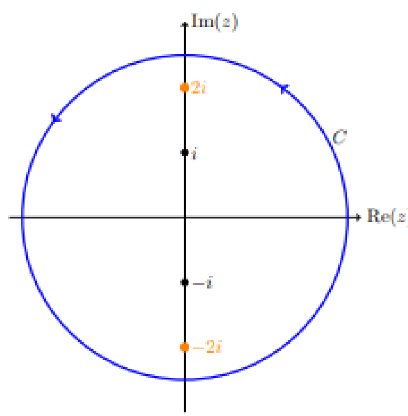
P3. Fórmula de Cauchy

Calcule las siguientes integrales vía fórmula de Cauchy:

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-3)} dz$

b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2} dz$

c) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$ con C descrito por:



P4. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-z^2}$ y $b > 0$ pruebe que:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} \cos(2by) dy = e^{-b^2} \int_0^{b} e^{y^2} dy$$

Indicación: Estudie e^{-z^2} en un contorno rectangular adecuado.

Propuestos

1. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \dfrac{2}{z^2+1}$ en torno a $z_0 = 1$.
2. Usando adecuadamente la formula de Cauchy calcule la siguiente integral para todo r distinto de $r = 1$ y $r = 2$:
$$\oint_{|z|=r} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$$

Resumen

Condiciones de Cachy Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $-\frac{\partial v}{\partial x}$

Teorema: Una función compleja es derivable si y solo si cumple las condiciones de Cauchy Riemann y es Frechet diferenciable .

Aproximación de Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Radio de Convergencia $R = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, con c_k el coeficiente de la serie centrada en z_0.
Obs: El radio puede depender de z_0 **Radio de convergencia**: Si este límite existe también se puede utilizar: $R = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1|}}$
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Dado un camino $\Gamma \subset \Omega$ parametrizado por $\gamma : [a, b] \to \Omega$, definimos la integral compleja de f sobre Γ mediante:

$$\int_\Gamma f(z)dz \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$$

Además, con $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= \int_a^b [u(x(t), y(t))\dot{x}(t) - v(x(t), y(t))\dot{y}(t)]dt \\ &\quad + i\int_a^b [u(x(t), y(t))\dot{y}(t) + v(x(t), y(t))\dot{x}(t)]dt \\ &= \int_\Gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} + i\int_\Gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{r}\end{aligned}$$

Fórmula de Cauchy
Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p, r)} \subset \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p, r)$ se tiene la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$$

MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 13: Funciones Complejas, C-R y Series

30 de noviembre de 2021

P1. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, entorno a $z_0 = 0, -1, i$, también dibuje los discos de convergencia y relacione las distancias de los z_0 con $z = 1$.

P2. Calcule los radios de convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{n^n}{n!}} z^n$ → Centrado en $(z-z_0)^n$ $z_0 = 0$

a_n

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2^n) z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (log(n))^2 z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z+2)^{2^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{3 + (-1)^n}_{a_n})^n z^n$

$\limsup \sqrt[n]{a_n}$

$\limsup \sqrt[n]{4^n}$

4

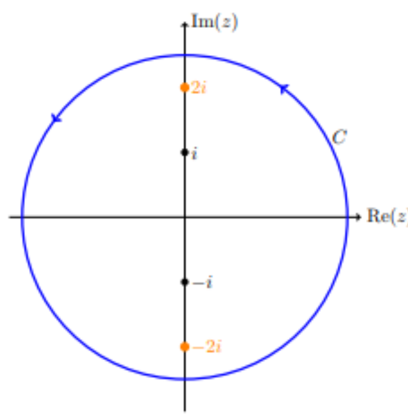
P3. Fórmula de Cauchy

Calcule las siguientes integrales vía fórmula de Cauchy:

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-3)} dz$

b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2} dz$

c) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$ con C descrito por:



P4. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-z^2}$ y $b > 0$ pruebe que:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} \sin(2by) dy = e^{-b^2} \int_0^{b} e^{y^2} dy$$

Indicación: Estudie e^{-z^2} en un contorno rectangular adecuado.

Propuestos

1. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \dfrac{2}{z^2+1}$ en torno a $z_0 = 1$.
2. Usando adecuadamente la formula de Cauchy calcule la siguiente integral para todo r distinto de $r = 1$ y $r = 2$.

$$\oint_{|z|=r} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$$

Resumen

Condiciones de Cachy Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $-\frac{\partial v}{\partial x}$

Teorema: Una función compleja es derivable si y solo si cumple las condiciones de Cauchy Riemann y es Frechet diferenciable .

Aproximación de Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Radio de Convergencia $R = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, con c_k el coeficiente de la serie centrada en z_0.
Obs: El radio puede depender de z_0 **Radio de convergencia**: Si este límite existe también se puede utilizar: $R = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1|}}$
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Dado un camino $\Gamma \subset \Omega$ parametrizado por $\gamma : [a,b] \to \Omega$, definimos la integral compleja de f sobre Γ mediante:

$$\int_\Gamma f(z)dz \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$$

Además, con $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ y $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= \int_a^b [u(x(t),y(t))\dot{x}(t) - v(x(t),y(t))\dot{y}(t)]dt \\ &+ i\int_a^b [u(x(t),y(t))\dot{y}(t) + v(x(t),y(t))\dot{x}(t)]dt\end{aligned}$$

$$= \int_\Gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} + i\int_\Gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{r}$$

Fórmula de Cauchy
Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p,r)} \subset \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p,r)$ se tiene la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

P1. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, entorno a $z_0 = 0, -1, i$, también dibuje los discos de convergencia y relacione las distancias de los z_0 con $z = 1$.

a) $\boxed{z_0 = 0}$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{N=0}^{\infty} a_N z^N$$

Idea

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Geométrica cuando $|x|<1$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{N=0}^{\infty} \underset{(z-0)^N}{z^N}}$$

¿Quién es a_N? $a_N = 1$

$$\limsup \sqrt[N]{1} = 1$$

$$\sqrt[N]{8} \to 1$$

$$R = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z+1)^n$$

$$\frac{1}{2-(z+1)} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z+1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{a_n} \cdot (z+1)^n$$

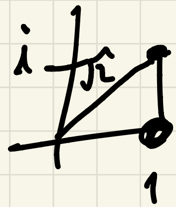
$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\boxed{R = 2}$$

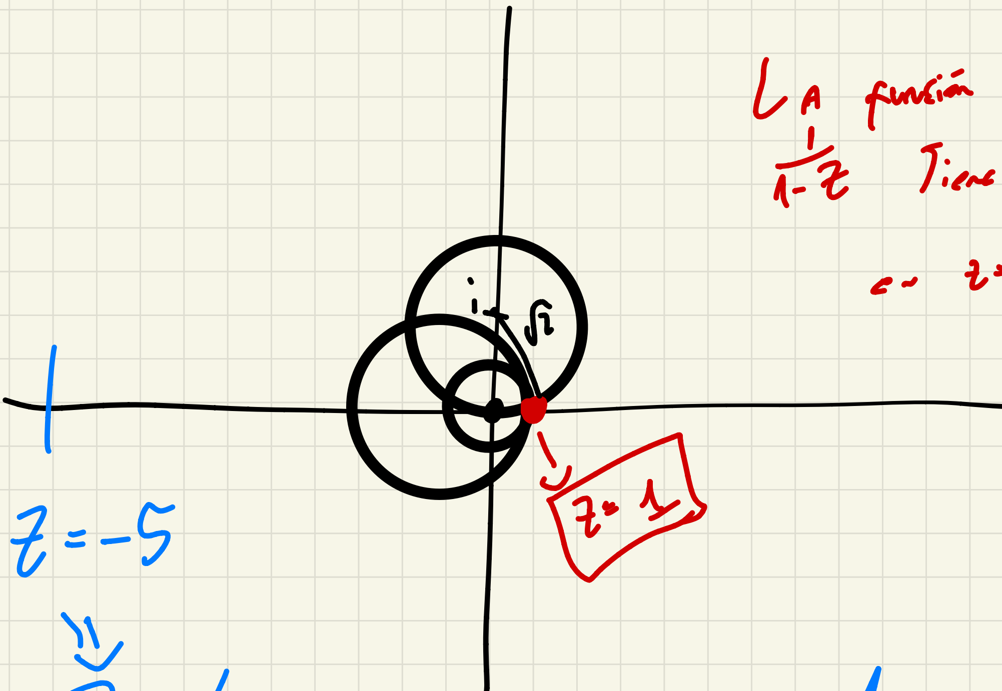
$$\frac{1}{1-i-(z-i)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n$$

$$|i+1| =$$



$$R = \sqrt{2}$$

La función $\frac{1}{1-z}$ Tiene problem en $z=1$



$z=-5$

$\Rightarrow$

$R=6$

$$\frac{1}{2-z}$$

Si hago serie entorno a $z_0=0 \Rightarrow R=2$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{1}{(1-i)\left(1-\frac{z-i}{1-i}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-i}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(1-i)^k}\right)$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{(1-i)} \cdot \frac{1}{(1-i)^k}$$

$$\Rightarrow R = \limsup \sqrt[k]{|1-i|^k}$$

$$= \sqrt{2}$$

P2. Calcule los radios de convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n) z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (log(n))^2 z^n$ 1

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z+2)^{2^n}$ Raro

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n z^n$

a) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ | Bueno idea usar $R = \limsup \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ |

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{n^n}{n!}}{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\limsup \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \Rightarrow R = e^{-1}$$

b) $a_n = e^{-in}$

$$|a_n| = |e^{-in}| = \sqrt{\cos(-n)^2 + \sin(-n)^2} = 1$$

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$$

c) $a_n = (n + 2^n) \approx 2^n$

n grande

$$\boxed{\text{Concluimos que } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 2}$$

<u>Para n grande</u>

$$\limsup \sqrt[n]{2^n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{2 \cdot 2^n}$$

$$\limsup 2 \leq \quad \cdot/\cdot \quad \leq \limsup \sqrt[n]{2} \cdot 2$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$2 \qquad\qquad\qquad 2$$

$$\Rightarrow \to 2$$

$R = \frac{1}{2}$

Recordar que 1 vez es R^{-1} el que calculamos

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log(n))^2 z^n$

$a_n = (\log(n))^2$

$\text{Limsup} \left(\frac{\log(n)}{\log(n+1)}\right)^2 = \overline{L}$

$L = \text{Lim} \frac{\log(n)}{\log(n+1)} \Rightarrow \overline{L} = L^2$

$$\lim \frac{\log(n)}{\log(n+1)} \overset{L'H}{=} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} \to 1$$

$$\Rightarrow \overline{L} = \boxed{1 = R}$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (z+2)^{2^n}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z+2)^k$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 2^n \\ (\log_2(k))^2 & k = 2^n \end{cases}$$

$$R = \limsup \left| \frac{\log_2(k)}{\log_2(k+1)} \right|^2 = 1^2 = 1$$

f) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(3+(-1)^n\right)^n z^n$$

$$\limsup \sqrt[n]{\left(3+(-1)^n\right)^n} = \lim \sqrt[\cancel{n}]{(3+1)^{\cancel{n}}} = 4$$

tomar la sucesión maximizando $\phi(n) = 2n$

$$R = \frac{1}{4}$$

$3+(-1)^n \leq 3+1$

$3+(-1)^{2n}$

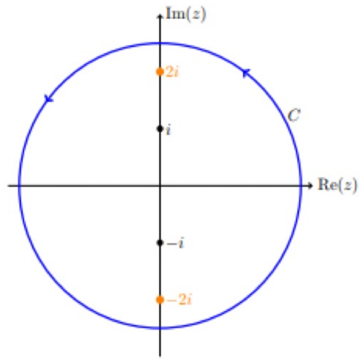
P3. Fórmula de Cauchy

Calcule las siguientes integrales vía fórmula de Cauchy:

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-3)}dz$

b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2}dz$

c) $\displaystyle\int_{C} \frac{1}{(z^2+4)^2}dz$ con C descrito por:



a) $$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-3)}dz = \int_{|z|=1} \frac{\left(\frac{e^z}{z-3}\right)}{(z-0)}dz \overset{\text{Cauchy}}{=} \left.\frac{e^z}{z-3}\right|_{z=0} \cdot (2\pi i)$$

$|z|=2$ ↓ Disco centrado en 0 y Radio 2

$$= \frac{e^0}{-3} \cdot (2\pi i)$$

$$= \boxed{-\frac{2\pi i}{3}}$$

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z(z-3)}\,dz = \int \frac{e^z}{(-3)}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-3}\right)dz$$

$$= (2\pi i)\left(\frac{e^0}{(0-3)} - \frac{e^3}{(-3)}\right)$$

$$= (2\pi i)\left(\frac{e^3 - 1}{3}\right)$$

b) $$\int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2}\,dz = \int_{|z|=1} \frac{\frac{z(z-\frac{1}{2})}{(z-2)^2}}{z-\frac{1}{2}}\,dz \quad \frac{z(z-\frac{1}{2})}{(z-2)^2} \to f(z)$$

$$\overset{z_0=\frac{1}{2}}{=} 2\pi i\, f(z_0) = 0$$

c) $$\int \frac{z}{(z^2+4)^2}\,dz = \int \frac{1}{(z+2i)^2}\cdot\frac{1}{(z-2i)^2}\,dz$$

$$\int \frac{-4iz}{(z^2+4)^2}\,dz = \int \frac{1}{(z+2i)^2} - \frac{1}{(z-2i)^2}\,dz$$

$$\Rightarrow \int \frac{z}{(z^2+4)^2}\,dz = \frac{1}{-4i}\left(\int \frac{1}{(z+2i)^2} - \frac{1}{(z-2i)^2}\,dz\right)$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

Al aplicar Formula como los $f(z)$ en ambos casos son constantes $f^{(1)}(z) = 0$

$$\Rightarrow \int_C \frac{z}{(z^2+4)^2}\,dz = 0$$

C contiene $2i$, $-2i$

P4. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-z^2}$ y $b > 0$ pruebe que:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx = e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\cos(2by)dy = e^{-b^2}\int_0^b e^{y^2}dy$$

Indicación: Estudie e^{-z^2} en un contorno rectangular adecuado.

↘ Es holomorfa en $\mathbb{C}$

$$\int_{\text{Cerrado}} e^{-z^2}\,dz = 0$$

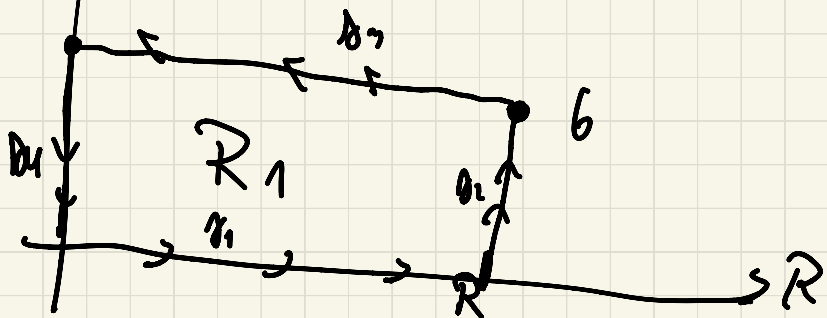
↑ Cauchy-Goursat

Cosas que veo en b en un $\cos(\,)$ en una exponencial

$e^{2ib} \to \cos(2b)$

e^{b^2}

Veo un e^{-x^2} y $\int_0^\infty dx$



y luego $R \to \infty$

$$\gamma_1 : r_1(t) = t + 0i \quad , \quad t \in [0, R]$$
$$r_1'(t) = 1 + 0i \quad , \quad t \in [0, R]$$

$$\gamma_2 : r_2(t) = R + ti \quad , \quad t \in [0, b]$$
$$r_2'(t) = i \quad , \quad t \in [0, b]$$

$$\gamma_3 : r_3(t) = (R - t) + bi \qquad t \in [0, R]$$
$$r_3'(t) = -1 \qquad t \in [0, R]$$

$$\gamma_4 \quad r_4(t) = (b - t)i \qquad t \in [0, b]$$
$$r_4'(t) = -i \qquad t \in [0, b]$$

$$\int_{R_1} e^{-z^2} dz = 0 = \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_4} e^{-z^2} dz$$

$$= \int_0^R e^{-t^2} dt + \int_0^b e^{-(R+ti)^2} i\, dt - \int_0^R e^{-((R-t)+bi)^2} dt$$

$$- \int_0^b e^{-((b-t)i)^2} i\, dt$$

$$= \int_0^R e^{-t^2} dt + \int_0^b i\left(e^{-R^2} \cdot e^{-2Rit} \cdot e^{-t^2}\right) dt$$

$$- \int_0^R e^{-((R-t)+bi)^2} dt - \int_0^b e^{-((b-t)i)^2} i\, dt$$

$$= \int_0^R e^{-t^2} dt + i e^{-R^2} \int_0^b e^{-2Rti} \cdot e^{-t^2} dt$$

$$- \int_0^R e^{-u^2-2ubi+b^2} du - i\int_0^b e^{u^2} du$$

$$I = \left| \int_0^b e^{-2Rti} \cdot e^{-t^2} dt \right| < M$$

$$\left| e^{-R^2} \cdot I \right| < e^{-R^2} \cdot M \xrightarrow{R \to \infty} 0$$

Tendiendo $R \to \infty$

$$0 = \int_0^\infty e^{-t^2} dt - \int_0^\infty e^{-u^2} (\cos(2ub) - i\sin(2ub)) \cdot e^{b^2} du$$

$$- i\int_0^b e^{u^2} du$$

Como son números complejos necesito que $Re = 0$
$Im = 0$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \int_0^\infty e^{-u^2} \cos(2ub)\, e^{b^2} du$$

$$\Rightarrow e^{-b^2} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \int_0^\infty e^{-u^2} \cos(2ub)\, du$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^b e^{u^2} du\right) e^{-b^2} = \int_0^\infty e^{-u^2} \sin(2ub)\, du$$

1. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \dfrac{2}{z^2+1}$ en torno a $z_0 = 1$.

2. Usando adecuadamente la formula de Cauchy calcule la siguiente integral para todo r distinto de $r = 1$ ¿S y $r = 2$; S

$$\oint_{|z|=r} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$$

$$f(z) = \frac{2}{z^2+1} = \frac{2}{(z+i)} \cdot \frac{1}{(z-i)}$$

Opción 1

Opción 2

$$= \frac{2}{1-(-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot (-z^2)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k z^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

Con $a_k = \begin{cases} 2(-1)^{\frac{k}{2}} & \text{Si } k \in \text{par} \\ 0 & \text{Si } k \text{ impar} \end{cases}$

P2) $r = 1{,}5 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1{,}5} \frac{f(z)}{z-1} \, dz$

$- f(z) = \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2}$

$f(1) = \frac{-1}{-1} = 1$

$\Rightarrow \int_{|z|=1{,}5} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} \, dz = 2\pi i$

$\boxed{r = 7{,}5}$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$$\frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} = \sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2) \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \right)$$

$$\int_{|z|=2,5} \% \, dz =$$

$$= \int_{|z|=2,5} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz - \int_{|z|=2,5} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} dz$$

$$= 2\pi i \left(\sin(4\pi) + \cos(4\pi) - \sin(\pi) - \cos(\pi) \right)$$

$$= 2\pi i \left(0 + 1 - 0 + 1 \right)$$

$$= \boxed{4\pi i}$$