MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Ejemplo de Función que cumple las condiciones C-R y no es holomorfa

Considere la función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & x \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Muestre que g cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$, pero no es diferenciable.

$$u = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$$

$$v = \frac{xy^3}{x^2+y^4}$$

Calculamos las derivadas en $(0,0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 0^2}{t(t^2+0^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{t0^2}{t^2+0^4} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{0t^3}{t(0^2+t^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{0t^2}{0^2+t^4} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{0^2t^2}{t(0^2+t^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{0^2t}{0^2+t^4} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{t0^3}{t(t^2+0^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{0^3}{t^2+0^4} = 0$$

Con lo que cumple las ecuaciones de CR en $(0,0)$

Obs: En este caso dan las derivadas 0, pero esto no tendría por que suceder, podrían dar valores distintos y cumplir C-R, fue coincidencia

Para ver que no es diferenciable veamos que pasa con el limite

$$\lim_{z\to 0} \frac{g(z)-g(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \cdot \frac{x+iy}{x+iy} = \lim_{z\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

El límite de $z \to 0$ debe ser independiente de como se llega, así que veamos dos caminos. Uno por la recta $x = y$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(x^2+x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x^2)} = 0$$

Ahora, tomemos el limite por la curva $x = y^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(x^2+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Por lo que el valor del limite depende del camino que toma, y con esto la función no es diferenciable en $(0,0)$.