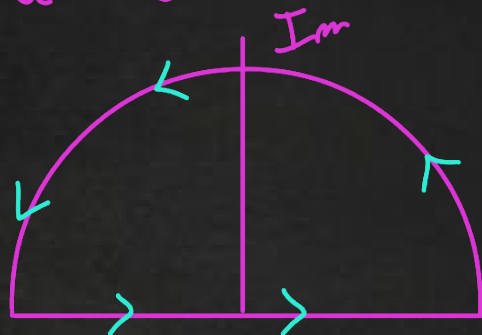


1. Sea $\int_{\gamma} |z| \bar{z} dz$ con γ

Semicirculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \text{Im } z \geq 0\}$

Como es un sector circular lo vamos a parametrizar en polares.

Con esta idea en mente vamos



con la parte superior con π vueltas. Solo nos quedamos

luego defino

$$\gamma_1(t) = e^{it} \quad t \in [0, \pi]$$

$$\gamma_2(t) = t \quad t \in [-1, 1]$$

Vemos

$$\gamma_1(\pi) = e^{-\pi i} = \cos(-\pi) + i \sin(\pi)$$

$$= -1 + 0$$

$$= -1$$

$$\gamma_2(-1) = -1 = \gamma_1(\pi)$$

Vemos

$$\gamma_1(0) = e^{0i} = \cos(0) + i \sin(0)$$

$$= 1$$

$$h_2(1) = 1 = h_1(0)$$

$\Rightarrow$ Continua y cada parametrización continua: Remember:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\Omega} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

h_1	h_2
$z = e^{it}$ $\frac{dz}{dt} = ie^{it}$ $\bar{z} = e^{-it}$	$z = t$ $\frac{dz}{dt} = 1$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} |z| \bar{z} dz = \int_0^{\pi} |e^{it}| e^{-it} \cdot i dt + \int_{-1}^1 |t| t dt$$

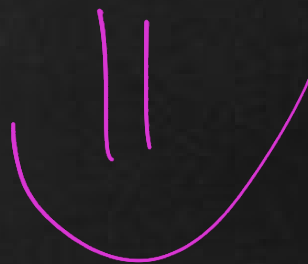
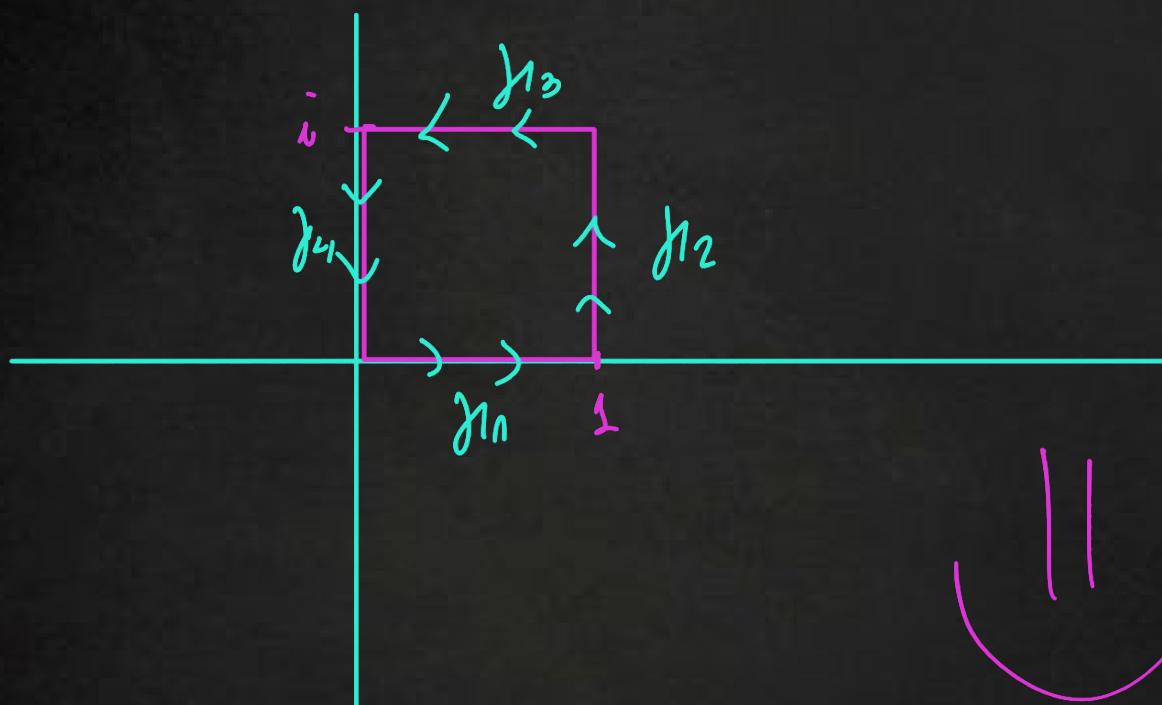
Remember x2

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0, \text{ si: } f(t) \text{ Impar}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 |t| t dt = 0$$

$$= \int_{\gamma} |z| \bar{z} dz = \int_0^{\pi} i dt = \pi i //$$

$\frac{P_2}{2\pi i} \int_{\gamma} |z|^2 dz$ donde γ cuadrado lado 1
 $\gamma \in \mathbb{R}$ cuadrante



Con esto la parametrización, siempre priorizo $t \in [0,1]$
 cualquier $t \in [0,1]$ hacen escrituras
 equivalentes, veamos
 su con trivialidad
 y bien definido

$\gamma_1(t) = t$
 $\gamma_2(t) = 1 + it$
 $\gamma_3(t) = (1-t) + i$
 $\gamma_4(t) = (1-t)i$

$t \in [0,1]$
 $t \in [0,1]$
 $t \in [0,1]$
 $t \in [0,1]$

$\rightarrow \gamma_1(0) = 0 = \gamma_4(1)$
 $\rightarrow \gamma_1(1) = 1 = \gamma_2(0)$
 $\rightarrow \gamma_2(1) = 1+i = \gamma_3(0)$
 $\gamma_3(1) = i = \gamma_4(0) //$

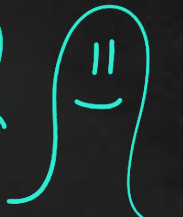
luego

$$\dot{\gamma}_1(t) = 1$$

$$\dot{\gamma}_2(t) = i$$

$$\dot{\gamma}_3(t) = -1$$

$$\dot{\gamma}_4(t) = -i$$

REMEMOR 

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\Omega} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} |z|^2 dz &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1+t^2)i dt - \int_0^1 (1+(1-t)^2) dt - \int_0^1 (1-t)^2 i dt \\ &= \int_0^1 (2t - 2 + 2ti) dt = i - 1 \end{aligned}$$

P3 

Ejercicio pelo do
contto!

Calcula $\int \frac{|z| |dz|}{1 - |z|^2}$ con $\gamma \in B(0, r)$

Contenidos



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

- Series de Potencia
- Convergencia uniforme
- Cálculo integrales fecas
- ¿Qué es $|dz|$?

$$z = re^{it} \Rightarrow dz = r i e^{it}$$

$$\Rightarrow |z| = |r i e^{it}|$$

$$= |r| |i| |e^{it}| = r \cdot 1 \cdot 1$$

$$= r$$

Indicación

Pruebe si $0 \leq t \leq R$

$$\frac{1}{R^2 - 2tR \cos(t) + t^2} = \frac{1}{(R^2 - t^2)} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{R}\right)^n \cos(nt) \right)$$

Indicación 2.

$\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ converge uniformemente a $\frac{t}{1-t}$, $|t| < 1$
 $t \in \mathbb{D}$

Pero la que me dan es de

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = ?? : \mathbb{C}$$

(Javier)

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} t^n + t^0$$

$$= \frac{t}{1-t} + 1 = \frac{1}{1-t}$$

Con esto

Primerlo vemos indicación
recomiendo $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$= \frac{1}{R^2 - 2 + R \cos(t) + t^2} = \frac{1}{R^2 - 1 + R(e^{it} + e^{-it}) + t^2}$$

$$= \frac{1}{R(R - 1e^{it}) - 1e^{it}(R - 1e^{it})} \quad \text{Binomio} \\ \text{término} \\ \text{común.}$$

$$= \frac{1}{(R - 1e^{it})(R - 1e^{-it})}$$

Vemos que $|z| = t$ y con fracciones
Parciales $z = t e^{it}$, $\bar{z} = t e^{-it}$

$$= \frac{1}{(R - z)(R - \bar{z})} \cdot \frac{z}{t} = \frac{z}{(R - z)(R t - t^2)}$$

$$= \frac{A}{R - z} + \frac{B}{R t - t^2} = A R z - A t^2 + B R - B z$$

$$\Rightarrow 1 = A R - B \wedge 0 = B R - A t^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{B R}{t^2} \Rightarrow 1 = \frac{B R}{t^2} - B$$

$$\Rightarrow r^2 = BR - Br^2$$

$$r^2 = B(R - r^2)$$

$$B = \frac{r^2}{R - r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{(R-z)(Rz-r^2)} = \frac{1}{R^2-r^2} \left(\frac{R}{R-z} + \frac{r^2}{Rz-r^2} \right)$$

Residuo

$$\Rightarrow \frac{1}{R^2 - 2R \cos(t) + r^2}$$

$$= \frac{1}{R^2 - r^2} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{r}{R}\right) e^{it}} + \frac{\left(\frac{r}{R}\right) e^{-it}}{1 - \left(\frac{r}{R}\right) e^{-it}} \right)$$

(Javier)

$$= \frac{1}{R^2 - r^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{i n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{-i n t} \right)$$

luego $\cos(mt) = \frac{e^{i m t} + e^{-i m t}}{2}$

Como converte uniforme en $[0, 2\pi]$

$$\int \frac{|z|}{|1-z|^2} |dz| = \int_0^{2\pi} \frac{r}{|1-re^{it}|^2} r dt$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-r\cos(t))^2 + r^2 \sin^2(t)}$$

$$= \frac{r^2}{1-r^2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nt) \right) dt$$

↑ parte real
y parte
imaginaria

Intercambio

$$\int \frac{1}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int$$

Por convergencia
uniforme

$$= \frac{r^2}{1-r^2} \left[t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \sin(nt)}{n} \right] \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2\pi r^2}{1-r^2}$$

Éxito en el
Control 



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

*Sí, llegas acá
nosss sobret*



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE