# Pauta Aux

**P1)** Muestre si $f'(z)$ existe :

a) $f(z) = \overline{z}$

Sabemos que $\overline{z} = x - iy$ , entonces :

$u(x,y) = x \wedge v(x,y) = -y$

Para ver si $f$ es holomorfa veamos si cumple con las ecs. de C-R.

Ecs. de C-R

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

1) $\dfrac{x}{\partial x} = \dfrac{-y}{\partial y} \Rightarrow 1 = -1$

No cumple en ningún punto esta igualdad

$\Rightarrow f(z)$ no es holomorfa.

b) $f(z) = 2x + ixy^2$

Notamos que $u(x,y) = 2x \wedge v(x,y) = xy^2$ . Para ver si $f$ holomorfa debe cumplir las hipótesis, una de ellas es que cumpla las ecs. de C-R.

Ecs. de C-R

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$\Rightarrow$ 1) $2 = 2x \longrightarrow$ de acá vemos que esta se cumple para $x = 1$.

2) $0 = -y^2 \longrightarrow$ esta se cumple para $y = 0$ , pero si $y$ es 0 no se cumple la primera ecuación

$\Rightarrow f(z)$ no es holomorfa.

c) $f(z) = \dfrac{1}{z} \Rightarrow f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{iy}{x^2+y^2}$

con $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \wedge v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$

Ecs. de C-R

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \wedge \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \wedge \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\longrightarrow$ son iguales.

2) $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{+y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \wedge \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$\longrightarrow$ Se cumplen ambas ecs. de C-R

y $u_x, u_y, v_x, v_y$ son continuas en todos los puntos menos en $x$ e $y = 0$

$\Rightarrow f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$

d) $f(z) = x^2 + iy^2 \rightarrow u(x,y) = x^2 \wedge v(x,y) = y^2$

Ecs. de C-R

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

2) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \wedge \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$

$\rightarrow x = y$.

2) $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\rightarrow$ Notamos que las ecs solo se cumplen en $x = y$.

$\Rightarrow f(z)$ es holomorfa en todos los ptos $x = y$.

e) $f(z) = z \cdot \operatorname{Im} z \rightarrow f(z) = (x+iy)\cdot y$.

$u(x,y) = xy \wedge v(x,y) = y^2$

Ecs. de C-R

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

2) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = y \wedge \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$

$\rightarrow$ cuando se cumple esto? $\Rightarrow y = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow x = 0$

$\Rightarrow f(z)$ es holomorfa en el pto $x\ e\ y = 0$

f) $f(z) = z - \bar{z} \rightarrow f(z) = x + iy - (x - iy)$

$\Rightarrow f(z) = 2iy$.

$u(x,y) = 0 \wedge v(x,y) = 2y$.

Ecs. de C-R

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

2) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \rightarrow 0 = 2$ No pos

$\Rightarrow f(z)$ no es holomorfa.

**P2** Sea $u(x,y)$ función de clase $C^2$. Pruebe que si $\Delta u = 0$ entonces existe una función $v = v(x,y)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

Hint: verifique que $\vec{F} = -\frac{\partial u}{\partial y}\hat{\imath} + \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\jmath}$ es conservativo.

Probemos que $\vec{F}$ es conservativo.

$\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow \vec{F}$ conservativo.

- $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$,

Notamos que $F_1 = -\frac{\partial u}{\partial y} \wedge F_2 = \frac{\partial u}{\partial x}$

$\Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

$\Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u$.

Por hipótesis sabemos que $\Delta u = 0$ entonces $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$

$\rightarrow \vec{F}$ conservativo !!

WOU

- Ahora, como $\vec{F}$ conservativo $\Rightarrow \exists\ v(x,y)$ tal que

(1) $\nabla v(x,y) = \vec{F}$.

por definición de gradiente tenemos:

$\nabla v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial v}{\partial y}\hat{\jmath}$ (2)

$\wedge$ por (1) $\nabla v(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}\hat{\imath} + \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\jmath}$

igualamos (1) y (2)

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial v}{\partial y}\hat{\jmath} = -\frac{\partial u}{\partial y}\hat{\imath} + \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\jmath}$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ $\rightarrow$ Ecs de C-R.

$\wedge\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$

Entonces, como $u(x,y)$ y $v(x,y)$ cumplen con las ecs. de C-R y $u_x$, $v_y$ son continuas por enunciado $\rightarrow$ $f = u + iv$ es holomorfa.

**P3)** Supongamos que en coor. cartesianas $z = x+iy$, $f(z) = \hat{u}(x,y) + i\hat{v}(x,y)$ y en polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ con $u$ y $v$ dif.
Verifique que $u(r,\theta) = \hat{u}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ y $v(r,\theta) = \hat{v}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ y pruebe que $f$ holomorfa ssi:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} = \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ (2) & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial v}{\partial r}. \end{array}} \quad (\star)$$

Verifiquemos lo primero:
sabemos que $f(z) = \hat{u}(x,y) + i\hat{v}(x,y)$, $z = x+iy$.
y $z$ en polares es $z = re^{i\theta}$

$z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$ $\rightarrow$ notamos que $z$ está escrita de la forma $z = x+iy$, con $x = r\cos\theta \wedge y = r\sin\theta$, por enunciado tenemos entonces que $f(z) = \hat{u}(r\cos\theta, r\sin\theta) + i\hat{v}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, pero como estamos en polares $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ igualando ambas $f(z)$ tenemos que

$$u(r,\theta) + iv(r,\theta) = \hat{u}(r\cos\theta, r\sin\theta) + i\hat{v}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} u(r,\theta) &= \hat{u}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ v(r,\theta) &= \hat{v}(r\cos\theta, r\sin\theta). \end{aligned}$$

Ahora: $f$ holomorfa $\Leftrightarrow$ $\star$

$\Rightarrow)$ $f$ holomorfa $\rightarrow$ (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\wedge$ $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$ (2).

Sabemos que:

$x = r\cos\theta \rightarrow \begin{aligned} \partial x &= \cos\theta\, dr \\ \partial x &= -r\sin\theta\, d\theta \end{aligned}$ , $y = r\sin\theta \rightarrow \begin{aligned} \partial y &= \sin\theta\, dr \\ \partial y &= r\cos\theta\, d\theta \end{aligned}$

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial u}{\cancel{\cos\theta}\, dr} = \dfrac{\partial v}{r\cancel{\cos\theta}\, d\theta}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}}$

(2) $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial v}{\cancel{\cos\theta}\, dr} = -\dfrac{\partial u}{r\cancel{\cos\theta}\, d\theta}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial v}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}}$

$\boxtimes$

$\Leftarrow$ | Se cumplen ecs. C-R en polares $\Rightarrow f$ holomorfa

$\cdot\, x = r\cos\theta \rightarrow \partial x = \cos\theta\, dr$ , $y = r\,\text{sen}\theta \rightarrow \partial y = \text{sen}\theta\, dr$

$\partial x = -r\,\text{sen}\theta\, d\theta$ , $\partial y = r\cos\theta\, d\theta$

(1) $\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} = \frac{\partial u}{\partial r} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{r\cos\theta} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\cos\theta}$

$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{r}}\frac{\partial v\cdot \cancel{r}\cancel{\cos\theta}}{\partial y} = \frac{\partial u\cdot\cancel{\cos\theta}}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.}$

(2) $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{r}}\cdot\frac{\partial u\cdot\cancel{r}\cos\theta}{\partial y} = -\frac{\partial v\cdot\cancel{\cos\theta}}{\partial x}$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

$\rightarrow$ Ecs de C-R en cartesianas $u$ y $v$ dif $\Rightarrow f$ holomorfa

P4 | Dada la curva $\vec{C} = \{ f(t) = \sin t\, \hat{\imath} + \sqrt{2}\cos t\, \hat{\jmath} + \sin t\, \hat{k}\ ,\ t\in[0,2\pi] \}$

Calcule $\int_{\vec{C}} v(r)\cdot dr$ con $v(r) = \frac{1}{2x^2+y^2}(-y, x, 2z)$.

Sabemos que si tengo una parametrización $r(t)$ que parametriza (dah!) mi curva $\vec{C}$ entonces:

$$\int_{\vec{C}} v(r)\cdot dr = \int_b^a v(r(t))\cdot r'(t)\, dt .$$

evaluemos $v(f(t))$.

$$v(f(t)) = \frac{1}{\underbrace{2\sin^2 t + 2\cos^2 t}_{2}}\left(-\sqrt{2}\cos t,\ \sin t,\ 2\sin t\right)$$

y $r'(t) = (\cos t,\ -\sqrt{2}\,\text{sen}\, t,\ \cos t)$

$$\Rightarrow \int_{\vec{C}} v(r)\cdot dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}\cos t,\ \sin t,\ 2\sin t\right)\cdot\left(\cos t,\ -\sqrt{2}\,\text{sen}\,t,\ \cos t\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \underbrace{-\sqrt{2}\cos^2 t - \sqrt{2}\,\text{sen}^2 t}_{-\sqrt{2}} + 2\,\text{sen}\,t\cdot\cos t\ dt$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{c}} v(r)\cdot dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -\sqrt{2} + 2\,\text{sen}\,t\,\cos t \;\; dt \cdot$$

$$\Rightarrow \;= \frac{1}{2}\left[-\sqrt{2}\cdot 2\pi + \frac{2\cdot \text{sen}^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi}\right] \quad 0$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{c}} v(r)\cdot dr = -\sqrt{2}\pi$$

Veamos si es conservativo!!

$$\oint_{\vec{s}} V(r)\cdot dr = 0 \quad \rightarrow \text{ si } v(r) \text{ es conservativo}$$

Verifiquemos si $\vec{c}$ es cerrada.

$$f(0) = (0, \sqrt{2}, 0) \;\wedge\; f(2\pi) = (0, \sqrt{2}, 0)$$

$\Rightarrow$ empieza y termina en el mismo punto osea $\vec{c}$ es cerrada y como $\int_{\vec{c}} v(r)\cdot dr \neq 0$ $v(r)$ No es conservativo

Mucho éxito hoy!!, les mando mi ki