MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 13:Complejos y polinomios

Ya no hay días buenos o malos, solo hay matraca

01.- Numeros Complejos

[**Formalidad**]: Identificamos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, de manera que se definen las operaciones $+$ y $\cdot$ para $z = (a, b), w = (c, d) \in \mathbb{C}$ por:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c, b + d) \\ z \cdot w &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

[**Unidad Imaginaria**]: Se define $i = (0, 1)$

[**Forma cartesiana**]: La expresión $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ es la forma cartesiana de $z = (a, b)$.
Ademas se define:

- $Re(z) = a$ (Parte real)
- $Im(z) = b$ (Parte imaginaria)

[**Coordenadas Polares**]: Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se define el par $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ donde:

- r es la distancia de z al origen, se llama modulo de z y se anota $r = |z|$.
- θ es el angulo que se forma entre el eje X (real) y el segmento que une el origen con z. Se llama argumento (principal) de z y se anota $arg(z)$.

[**Forma polar**]: Para $\theta \in \mathbb{R}$ anotamos $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. La expresión $|z|e^{iarg(z)}$ es la forma polar de z.

[**Props varias**]:

I) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i\alpha+\beta}$

II) $|zw| = |z| \cdot |w|$

III) $arg(zw) \equiv arg(z) + arg(w)\ (mod\ 2\pi)$

IV) $|z^k| = |z|^k$

V) $(e^{i\theta})^k = e^{i(k\theta)}$

[**Conjugado**]: Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define $\overline{z} = a - bi$

[**Función Conjugado**]: La conjugación es un automorfismo en $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, es autoinversa y restringida a $\mathbb{R}$ es la identidad.

[**Desigualdad triangular**]: Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|z + w| \leq |z| + |w|$.

[**Raices**: Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raíz $n-$esima de w si $z^n = w$.

[**Soluciones**]: Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$, si $w = re^{i\theta}$ (forma polar) entonces la ecuación $z^n = w$ tiene n soluciones, dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{(\theta+2\pi k)}{n}}$$

[**Prop**]: Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$, entonces la suma de las raíces n-ésimas vale 0:

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$$

[**Muchas propiedades**]: Sean $z, w \in \mathbb{C}$

a) $\overline{\overline{z}} = z$.

b) $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$.

c) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$.

d) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. Si $w \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

e) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$.

f) $Re(z) = Re(\overline{z})$ y $Im(z) = -Im(\overline{z})$.

g) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ y $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

h) Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{1}{|z|} e^{-iarg(z)}$

i) $|z| = |\overline{z}|$

j) $arg(\overline{z}) = 2\pi - arg(z)$

k) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

l) Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

m) Si $w \neq 0$, entonces $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

02.- Polinomios

[Polinomio]: Si $(K, +, \cdot)$ cuerpo, llamamos polinomio en K (denotado $p \in K[x]$) a una función:

$$\begin{array}{rccl} p: & K & \longrightarrow & K \\ & x & \longrightarrow & p(x) \quad = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k x^k \end{array}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $p_k \in K$ constantes.

[Igualdad de polinomios]: Si $p \in K[x]$ y $q \in K[x]$ con $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k x^k$ y $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} q_k x^k$ entonces:

$$p = q \Leftrightarrow (n = m \wedge \forall k \in \{0, ..., 1\},\ p_k = q_k$$

[Grado]: Si $p \in K[x]$ con $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k x^k$ llamamos $gr(p) = n$ con n el mayor numero tal que $p_n \neq 0$. Si $p(x) = 0$ definimos $gr(P) = -\infty$.
Obs.: Si $p_n = 1$, p se dira polinomio mónico.

[Anillo de polinomios]: Si $(K, +, \cdot)$ es cuerpo, entonces $(K[x], +, \cdot)$ es anillo conmutativo que no posee divisores de 0.

[Suma y producto de polinomios]: Si $p, q \in K[x]$ con $gr(p) = n$ y $gr(q) = m$ entonces $gr(p+q) \leq \max\{n, m\}$ con:

$$(p+q)(x) = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (p_k + q_k) x^k$$

Además $gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)$.

[Inversos]: En $(K[x], +, \cdot)$ los únicos polinomios con inversos son los de grado 0.

[Teorema de la División]: Sean $p, d \in K[x]$ con $d \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r \in K[x]$ tal que

1. $p = q \cdot d + r$
2. $gr(r) < gr(d)$

Obs.: A q se le llama cociente, a r resto, y d divisor de p con resto r.

[**Teorema del resto**]: Sea $p \in K[x]$ y $c \in K[x]$ y $c \in K$. El resto de dividir P por el polinomio $(x - c)$ es exactamente $p(c)$

[**Raíz**]: $c \in K$ es raíz de $p \in K[x]$ si $p(c) = 0$.

[**Prop raíces**]: $c \in K$ es raiz de $p \in K[x] \Leftrightarrow (x - c)|p(x)$ (el resto es 0).
Definimos $\mathcal{Z}(p)$ como el conjunto de raíces de p.

[**Prop varias**]:

1. Si $c_1, c_2, ..., c_k$ raíces distintas de p entonces $(x - c_1)(x - c_2)...(x - c_k)|p(x)$.
2. Si $p \in K[x]$ con $gr(p) = n \geq 1$ entonces p posee a lo más n raíces distintas.
3. Sean $n \geq 0$ y $p, q \in K[x]$ con $gr(p) \leq n$ y $gr(q) \leq n$. Si p y q coinciden en $n+1$ puntos, entonces son iguales.

[**TFA (DAlembert)**]: Si $p \in \mathbb{C}[x]$ es tal que $gr(p) = n \geq 1$ entonces p posee al menos una raíz en $\mathbb{C}$.
Se deduce mediante esto que el polinomio p debe poseer n raíces en $\mathbb{C}$.

[**Factorización compleja**]: Si $p \in \mathbb{C}[x]$ es tal que $gr(p) = n \geq 1$ entonces existen $\alpha, c_1, ..., c_m \in \mathbb{C}$ y naturales $l_1, ..., l_m \geq 1$ tales que $gr(p) = l_1 + ... + l_m$ y:

$$p(x) = \alpha(x - c_1)^{l_1}...(x - c_m)^{l_m}$$

[**Raíz conjugada**]: Si $p \in \mathbb{C}[x]$ tiene todos sus coeficientes reales, y $z \in \mathbb{C}$ es raíz de P entonces $\overline{z}$ es también raíz de p.

[**Factorización real**]: Si $p \in \mathbb{R}[x]$ es tal que $gr(p) = n \geq 1$, entonces existen $\alpha, c_1, ..., c_m, p_1, q_2, ..., p_s, q_s \in \mathbb{R}$ tales que:

$$p(x) = \alpha(x - c_1)..(x - c_m)(x^2 + p_1 x + q_1)..(x^2 + p_s x + q_s)$$

Donde c_k son las raíces del polinomio y $(x^2 + p_1 x + q_1), ..., (x^2 + p_s x + q_s)$ no tienen raíces reales, y $\alpha = p_n$ en p.

[**Coeficientes enteros**]: Sea $p \in \mathbb{R}[x]$. si $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ (r y s primos relativos) es una raíz de p entonces $r|p_0$ y $s|p_n$.

[**Ultima propiedad**]: Si $p \in \mathbb{R}[x]$ es mónico, con coeficientes $p_0, ..., p_{n-1} \in \mathbb{Z}$ entonces toda raíz racional de p es entera y divide a p_0.

P1. MÓDULO COMÚN:

a) Demuestre que las raíces en $\mathbb{C}$ de la ecuación de segundo grado $z^2 + z + 1 = 0$, son las raíces cúbicas de la unidad, distintas de 1.

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica de la unidad, con $z \neq 1$. Pruebe que

$$(1 + z)^3 + (1 + z^2)^9 + (1 + z^3)^6 = 62.$$

P2. a) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, (1 - i)^n + (1 + i)^n \in \mathbb{R}$.

b) Encuentre los valores $n \in \mathbb{N}$ que satisfacen la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}.$$

P3. a) Sean $n \geq 2$ un natural, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un complejo dado, y $\{z_0, \ldots, z_{n-1}\}$ las raíces n-ésimas de z. Calcular:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}.$$

b) Sean z_1, z_2 las soluciones de $z^2 - 2z + 2 = 0$. Demuestre que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\},\quad \frac{((\theta) + z_1 - 1)^n - ((\theta) + z_2 - 1)^n}{z_1 - z_2} = \operatorname{sen}(n\theta)(\csc(\theta))^n,$$

donde (θ) y $\csc(\theta)$ son, respectivamente, la cotangente y la cosecante de θ.

P4. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ complejos unitarios, y $u, v \in \mathbb{C}$, tales que:

$$z_1 + z_2 = -u,$$
$$z_1 \cdot z_2 = v.$$

a) Muestre que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$.
b) Muestre que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}$.
c) Muestre que $u = \overline{u} \cdot v$.
d) Si las formas polares de u y v son $|u|e^{i\varphi}$ y $|v|e^{i\theta}$ respectivamente, muestre que $\theta = 2\varphi + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

P5. Para $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 2$, denotemos por U_k el conjunto de las raíces k-ésimas de la unidad. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, con $m, n \geq 1$, y sea S el conjunto de soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $z^m = \overline{z}^{\,n}$. Muestre que:

a) Si $m \neq n$, $S = U_{m+n} \cup \{0\}$.
b) Si $m = n$, $S = [0, \infty) \cdot U_{2m}$, donde $[0, \infty) \cdot U_{2m} = \{\, r \cdot \omega \,|\, r \in [0, \infty) \wedge \omega \in U_{2m} \,\}$.

P6. **[Factorización en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$]**

a) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$
b) Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$. Se sabe que i es raiz de $p(x)$ de multiplicidad 2. Encuentre todas las raices y factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$

P7. Calcular los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ sea divisible por $q(x) = x^2 + 2x + 1$.

P8. Suponemos que $P \in \mathbb{R}[x], gr(P) \geq 4, a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Se sabe que

i) $P(x) = Q_1(x)(x^2 - b^2) + cx$
ii) $P(x) = Q_2(x)(x^2 - b^2)(x - a) + R(x)$, con R mónico.

Encuentre $R(x)$.

P9. Sabiendo que la ecuación $z^3 - 9z^2 + 33z = 65$ admite una solución en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de módulo $\sqrt{13}$, determina todas las raíces de la ecuación.

P10. Sea $P(x)$ un polinomio que tiene resto A cuando se lo divide por $(x - a)$ y tiene resto B cuando se lo divide por $(x - b)$. Encuentre el resto $R(x)$ cuando el polinomio es dividido por $(x - a)(x - b)$. Suponga que $a \neq b$.

P11. Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio con coeficientes reales. Sea $R(x)$ tal que

$$P(x) = (x - 1)Q(x) + R(x).$$

Si $R(4) = 0$ y $x = i$ es raíz de $P(x)$, calcule a, b, c.

P12. Si $n = 3k \pm 1$, para algún $k \in \mathbb{N}$, probar que $x^{2n} + 1 + (x + 1)^{2n}$ es divisible por $x^2 + x + 1$.

"La ciencia ha eliminado las distancias, pregonaba Melquíades. Dentro de poco, el hombre podrá ver lo que ocurre en cualquier lugar de la tierra, sin moverse de su casa".
Gabriel García Márquez-100 años de soledad-remake aux 1 para la vidA