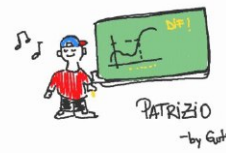


MA2002- Cálculo Avanzado y Aplicaciones**Profesor:** Carlos Conca.**Auxiliar:** Patricio Yáñez A. y Javier S

Auxiliar 12:Complejos

Resumen

- **[Forma Polar de un complejo]:** La forma polar del complejo z corresponde a

$$z = |z| \cos \theta + i|z| \sin \theta = |z|e^{i\theta}$$

- **[Función Compleja]:** Decimos que $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función compleja o de variable compleja. Usualmente, se denota $f(z)$, con $z = x + iy$, como

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

con u, v funciones de $\mathbb{R}^2$.

- **[Continuidad]:** Sea f una función compleja, decimos que f es continua en z_0 si y sólo si u y v son continuas en z_0 .
Notemos que, para funciones complejas, operaciones de álgebra y composición de continuas es continua.
- **[Derivabilidad]:** Dado $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, decimos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) si el límite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Se denota por $f'(z_0)$.

- **[Ecuaciones de Cauchy-Riemann]:** Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Decimos que f es derivable si y sólo si son diferenciables en $z_0 = (x_0, y_0)$ y se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Si lo anterior se cumple, definimos entonces la derivada como

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

- **[Función Holomorfa]:** Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja, con Ω su dominio y $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Decimos que f es **holomorfa** en z_0 si f es derivable en una vecindad de z_0 . Escribimos $f \in H(\Omega)$ si f es holomorfa para todo z_0 .
Notemos que el álgebra de funciones holomorfas mantiene las reglas del álgebra de funciones derivables.

Problemas

P1. Muestre si $f'(z)$ existe, de ser así encuentre su valor.

(a) $f(z) = \bar{z}$

(d) $f(z) = x^2 + iy^2$

(b) $f(z) = 2x + ixy^2$

(e) $f(z) = zImz$

(c) $f(z) = 1/z$

(f) $f(z) = z - \bar{z}$

P2. Sea $u = u(x, y)$ una función de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$. Pruebe que si u es armónica, i.e. $\Delta u = 0$, entonces existe una función $v = v(x, y)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

P3. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con Ω abierto no vacío. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ con u y v diferenciables. Verifique que $u(r, \theta) = \hat{u}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ y $v(r, \theta) = \hat{v}(r \cos \theta, r \sin \theta)$, y pruebe que f es holomorfa en Ω si solo si:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{\partial v}{\partial r}\end{aligned}$$

P4. Dada curva parametrizada $\vec{C} = \{f(t) = \sin t \hat{i} + \sqrt{2} \cos t \hat{j} + \sin t \hat{k}, t \in [0, 2\pi]\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(1) Calcule la integral de trabajo

$$\int_{\vec{C}} v(r) \cdot dr$$

donde

$$v(r) = \frac{-y}{2x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{x}{2x^2 + y^2} \hat{j} + \frac{2z}{2x^2 + y^2} \hat{k}.$$

(2) ¿Es v un campo conservativo? Justifique la respuesta.