

9. Complejos

a) **A cartesiana y polares**

Escriba en su forma cartesiana y polar los siguientes complejos:

$$1) (1-i)^4(1+i)^4 \quad 2) \frac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}} \quad 3) \frac{1}{1+i} \quad 4) \frac{1}{e^i+i}$$

b) **Crossover**

Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $U_n = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = 1\}$

- 1) Demuestre que $(U_n, \cdot)$ es un subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
- 2) Muestre que $f : U_n \rightarrow Z_n$ tal que:

$$f(e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = [k]_n$$

Con $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ es isomorfismo entre $(S_n, \cdot)$ y $(Z_n, \cdot_n)$

c) **Ecuación compleja**

Encuentre todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la siguiente ecuación:

$$z^3 - 1 = 5i$$

d) **Argumento**

Muestre que para $|z| = 1$ y $z \neq \pm 1$, se cumple que:

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

e) **Raíces de la unidad**

Sea $w \neq 1 \in \mathbb{C}$ una raíz cubica de la unidad. Pruebe que:

$$(1+w)^3 + (1+w^2)^9 + (1+w^3)^6 = 62$$

f) **Parte Imaginaria**

Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$ y $\text{Im}(z) > 0$. Demuestre que

$$\text{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) > 0$$

g) **Parte Real**

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $|z+w| = |z-w|$ con $w \neq 0$.

- 1) Demuestre que $\text{Re}(z\bar{w}) = 0$
- 2) Demuestre que $\text{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = 0$

h) **Ecuación compleja**

Encuentre los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelvan la ecuación:

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = \sqrt{3}i$$

i) **Lo iba a poner pero estaba en el apunte:** Problema 7 guía de problemas apunte semana 13.MA1101

Ejercicios: Variable Compleja.

1.- Realizar las operaciones indicadas y expresar el resultado en la forma $a+ib$.

(i) $(7-2i)(5+3i)$

(ii) $(i-1)^3$

(iii) $\overline{(1+i)(2i)(3i)}$

(iv) $\frac{3+i}{2+i}$

(v) $\frac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i}$

(vi) $(1+i)^{-2}$

(vii) $\frac{1+2i}{2-i}$

(viii) $i^2(1+i)^3$

2.- Calcular la parte real e imaginaria de las siguientes fracciones

a) $f_1(z) = \bar{z}^2$ b) $f_2(z) = z^3$ c) $f_3(z) = \frac{1}{z}$

d) $f_4(z) = \frac{1}{z^2+1}$ e) $f_5(z) = \frac{z+i}{z-i}$

3.- Calcular las siguientes cantidades

a) $|(1+i)(2-i)|$ b) $\left| \frac{4-3i}{2-i\sqrt{5}} \right|$ c) $|(1+i)^{20}|$ d) $|\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)|$

4.- Calcular los números complejos z tales que

$$\frac{1+z}{1-z} \text{ es:}$$

Ⓐ un número real ; Ⓑ Un número imaginario puro.

5.- Expresar en forma polar los siguientes números complejos

a) $-\sqrt{3}-i$ b) $-\sqrt{3}+i$ c) $\frac{3}{\sqrt{3}+i}$, d) $\frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$

6.- Expresar los siguientes números en la forma $a+ib$:

a) $(-1+\sqrt{3}i)^{11}$ b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$ c) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6$

d) $(-\sqrt{3}+i)^{13}$

7.- Calcular $\arg(zw)$ y $\arg(z/w)$ supuestos

conociendo $\arg(z)$ y $\arg(w)$.

sg: Hay que distinguir varios posibilidades.

Sea $z = x + iy$. Supuesto que $|z| = 1$, $z \neq 1$, $z \neq -1$,
pruebe que

$$\arg \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } 1-x+y > 0 \\ -\frac{3\pi}{4} & \text{si } 1-x+y < 0 \end{cases}$$

9.- Resuelve la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$
donde a, b, c son números complejos conocidos y
 $a \neq 0$.

10.- Calcule todas las soluciones de las siguientes
ecuaciones

a) $z^3 = 1+i$ b) $z^4 = i$ c) $z^3 = -1+i\sqrt{3}$ d) $z^8 = 1$

(e) $z^2 + \sqrt{3}i z - 6i = 0$.

11) Demuestre la "Igualdad del paralelogramo"

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

Explique su significado geométrico

12.) Pruebe que $\left| \frac{z-2}{1-\bar{z}} \right| < 1$ si $|z| < 1$ y $|z| < 1$

y también si $|z| > 1$ y $|z| > 1$.

13.) Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π . Pruebe las igualdades

$$\textcircled{a} \quad 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx) = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)}$$

$$\textcircled{b} \quad \sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)}$$

14.) Pruebe que

$$\textcircled{a} \quad \sin(3\varphi) = 3\sin(\varphi) - 4\sin^3(\varphi) \quad \textcircled{b} \quad \cos(4\varphi) = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$$

15.) Representar gráficamente los conjuntos de números complejos z que verifican:

$$\textcircled{a} \quad |z-3| \leq 3; \quad \textcircled{b} \quad 2 < |z-i| \leq 3; \quad \textcircled{c} \quad |\arg(z)| < \pi/6$$

$$\textcircled{d} \quad |z-i| + |z+i| = 4; \quad \textcircled{e} \quad |z-1| = |z-2i|; \quad \textcircled{f} \quad \left| \frac{z-i}{z+2i} \right| = 2$$

$$\textcircled{g} \quad \operatorname{Im}(z^2) > 0; \quad \textcircled{h} \quad |z-i| = \operatorname{Im}(z) + 1.$$