

MA1001-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones**Profesor:** Carlos Conca**Auxiliares:** Javier Santidrián Salas y Patricio Yáñez Alarcón**Auxiliar 9 SERIES**

Miércoles 12 de Octubre de 2022

- 1) Dada la función $f(x) = |x|$ calcule:
 - a) Su serie de Fourier en $[-1, 1]$.
 - b) Su serie de Fourier en $[0, 2]$.
 - c) Su desarrollo en serie de senos en $[0, 1]$.
 - d) Su desarrollo en serie de cosenos en $[0, 1]$.
- 2) Calcule la serie de Fourier de $f(x) = x^2$ en $[-1, 1]$.
- 3) Deduzca que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- 4) Considere la esfera centrada de radio 3, donde se definen 3 curvas, una en el eje xz , otra en $z = \sqrt{5}$ y otra en el eje yz , como sector esférico. Defina las curvas y calcule la integral de Trabajo de acuerdo a $F(x, y, z) = 2y\hat{y} + 3x\hat{j} - 2z^2\hat{k}$ en dirección antihoraria respecto al plano usual.
- 5) Consideremos el caso particular de una función $f(x)$ con periodo 2π (es decir, $l = \pi$) que es continua con primera y segunda derivadas ambas continuas, veamos si tiene expansión como serie de Fourier [Teórico]

Serie de Fourier

Sea $f : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f admite un desarrollo en *Serie de Fourier* en $[-T, T]$ si existen escalares $\{a_i\}_{i=0}^\infty, \{b_j\}_{j=1}^\infty$ tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right], \quad \forall x \in [-T, T]$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

Convergencia

Nos interesa saber cuando la serie de Fourier converge a la función, o sea, si definimos:

$$S_f^N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right]$$

Y llamamos $S_f = \lim_{N \rightarrow \infty} S_f^N$ (si es que existe), entonces, ¿Cuándo $S_f = f$?

- Si f es de cuadrado integrable ($\int_{-T}^T f^2(t) dt < \infty$), Entonces S_f^N converge a f en media cuadrática:

$$\int_{-T}^T (f(x) - S_f^N)^2 dx \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$
- Si f es continua por trozos en $[-T, T]$ y con derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de $(-T, T)$, don derivada por la izquierda en $x = T$ y por la derecha en $x = -T$, entonces $S_f^N(x)$ es convergente para cada $x \in [-T, T]$. Y se tiene que:

$$S_f(T) = S_f(-T) = \frac{1}{2}[f(T) + f(-T)]$$

Si f es continua en x_0 entonces $S_f(x_0) = f(x_0)$ y si x_0 es un punto de discontinuidad entonces $S_f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$

- Si f es derivable en $[-T, T]$ y $f(T) = f(-T)$ entonces $f = S_f$ en $[-T, T]$. Si además f' es de cuadrado integrable, la convergencia de S_f^N hacia f es uniforme.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es $2T$ -periódica de clase C^1 entonces $f = S_f$ en $\mathbb{R}$ y S_f^N converge uniformemente a f .