- **[Integral de Flujo]**: Sea S una superficie orientable, $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ campo de normales continuos sobre S y $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial continuo sobre $\Omega \subseteq S$. Se define la integral de flujo de F a través de la superficies S orientada según $\hat{n}$ por:

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{dA} = \iint_S F \cdot \hat{n} dA = \iint_D F(\varphi(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right] dudv$$

  Donde φ es parametrización regular de S que respeta orientación.

- **[Observación]**: Si S^- está orientada en el sentido opuesto de S entonces la integral anterior cambia de signo.

- **Teorema de la Divergencia de Gauss.**
  Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\overrightarrow{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase $\boldsymbol{C^1}$** sobre un abierto $U \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \iiint\limits_{\Omega} div(\overrightarrow{F})\, dV$$

Recuerdo Definición de Integral de flujo. Sea S una superficie regular orientable, $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de normales continuo sobre S, y $\overrightarrow{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido sobre un abierto Ω que contiene a S. Se define la integral de flujo del campo $\overrightarrow{F}$ a través de la superficie S orientada según $\hat{n}$ mediante

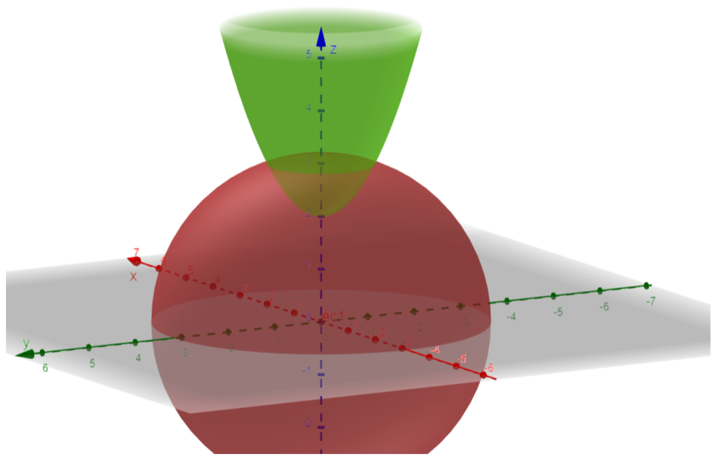
$$\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iint\limits_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{\varphi}(u,v)) \cdot \underbrace{\frac{\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\|}}_{\hat{n}} \underbrace{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\| du\, dv}_{dA} = \iint\limits_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{\varphi}(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v}(u,v)\right] du\, dv$$

donde $\overrightarrow{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S compatible con la orientación, esto es tal que

$$\hat{n} = \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \Big/ \left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\|$$

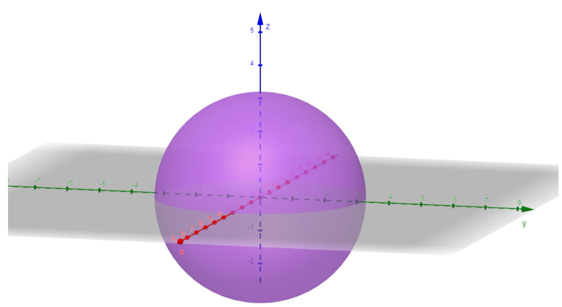
P1.- Calcule el flujo del campo vetorial $\overrightarrow{F} = (x, y, z)$ que sale del sólido limitado por las superficies:

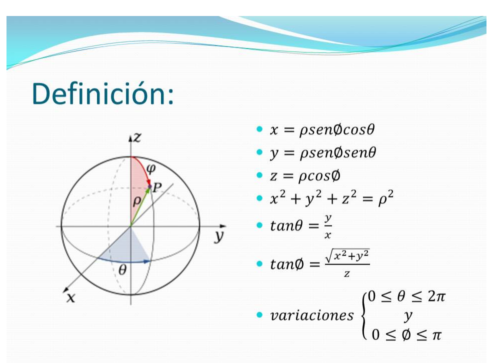
$$x^2 + y^2 + z^2 = 10 \wedge z = 2 + x^2 + y^2$$



P2.- Verificar el teorema de la divergencia para el campo vectorial $\overrightarrow{F} = |r|\hat{r}$ y la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

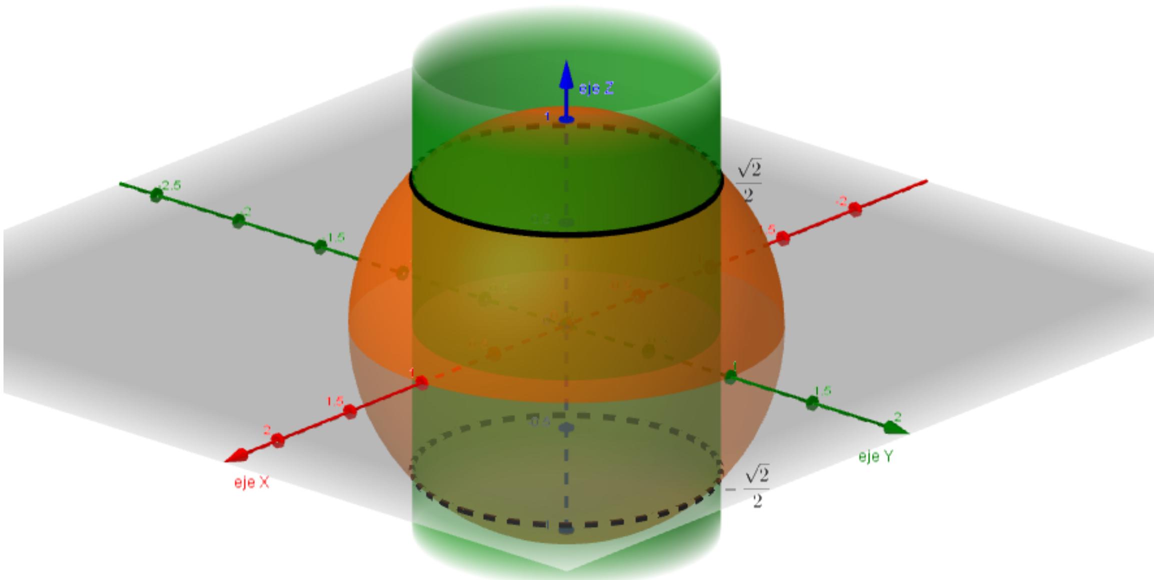




P3.- Calcular le flujo del campo $F = (0, e^{sen(xz)}, y^2)$ a través del semielipsoide superior $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6, z \geq 0$, con su normal apuntando hacia arriba

Ejercicios Propuestos

P4.- Verifique el Teorema de la Divergencia, calculando por separado las integrales $\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot \hat{n}\, dA$ y $\int_{\Omega} \overrightarrow{F}\, dV$ con $\overrightarrow{F} = (x, y, z)$, $\Omega = D \cap G$ donde $D = \{x^2 + y^2 \geq 1/2\}$, $G = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ y donde $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.



P5.- Calcule el flujo del campo

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (e^z \operatorname{sen} y + xy^2 z, e^x \cos z + x^2 yz, x^2)$$

a través del manto del cono de ecuación $z = \rho - 1$, $-1 \leq z \leq 0$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, orientada según la normal exterior.

P6.- Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto y acotado, y sea U conjunto abierto tal que $\Omega \subseteq U$.
Sea $A := \{v \in C^2(U) : \Delta v = 0 \text{ } en \text{ } \Omega\}$, es decir, A es el conjunto de todos los campos escalares armónicos en Ω. Dado $h \in C(\overline{\Omega})$ campo escalar fijo, para $v \in A$ definamos el operador $Q(v)$ mediante:

$$Q(v) = 2 \int\limits_{\partial\Omega} h \nabla v \cdot \hat{n}\, dS - \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\, dV.$$

Suponga que $u \in A$ satisface $u = h$ sobre $\partial\Omega$. Muestre que para todo campo escalar $v \in A$ se tiene la igualdad:

$$Q(u) - Q(v) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2\, dV.$$

A partir de lo anterior, deduzca el principio de Thompson: $Q(v) \leq Q(u)\ \forall\, v \in A$

- **[Vectores Tangentes]**: Se definen los vectores tangentes a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$, mediante:

$$\hat{t}_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\| \qquad \hat{t}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$$

  Y se dirá que φ es regular si $\hat{t}_u, \hat{t}_v$ son linealmente independientes.

- **[Vector normal]**: Definimos el vector normal a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$ a:

$$\hat{n} = \frac{\hat{t}_u \times \hat{t}_v}{\left\| \hat{t}_u \times \hat{t}_v \right\|}$$

  Y con ello el plano tangente al plano generado por $\hat{t}_u, \hat{t}_v$ (normal a $\hat{n}$.

- **[Campo de normales]**: Dado S regular y $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización regular de S podemos calcular un campo de normales $\hat{n}$ sobre S mediante:

$$\hat{n}(u,v) = \frac{\hat{t}_u(u,v) \times \hat{t}_v(u,v)}{\left\| \hat{t}_u(u,v) \times \hat{t}_v(u,v) \right\|} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\|}$$

- **[Superficie regular orientable]**: Diremos que una superficie regular S está orientada según el campo de vectores normales $\hat{n} : s \to \mathbb{R}^3$ cuando este quede bien definido globalmente como una función continua sobre la superficie.

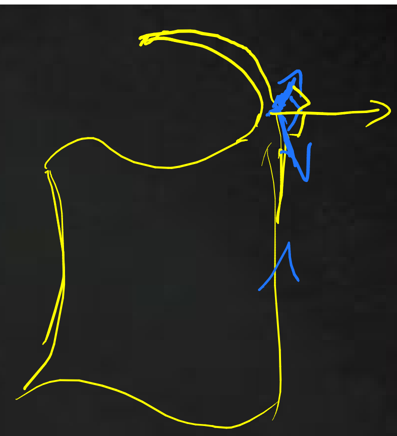
- **[Área]**: El Área de una superficie S viene dada por:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv$$

- **[Integral de Campo Escalar]**: Sea S una superficie orientable y $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campo escalar continuo sobre $\Omega \subseteq S$. Se define la integral de f a través de la superficies S como:

$$\iint_S f \cdot dS = \iint_D f(\varphi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv$$

  Donde φ es parametrización regular de S que respeta orientación.



- **[Integral de Flujo]**: Sea S una superficie orientable, $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ campo de normales continuos sobre S y $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial continuo sobre $\Omega \subseteq S$. Se define la integral de flujo de F a través de la superficies S orientada según $\hat{n}$ por:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_S F \cdot \hat{n} dA = \iint_D F(\varphi(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right] dudv$$

  Donde φ es parametrización regular de S que respeta orientación.

- **[Observación]**: Si S^- está orientada en el sentido opuesto de S entonces la integral anterior cambia de signo.

- **Teorema de la Divergencia de Gauss.**
  Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** sobre un abierto $U \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} div(\vec{F})\, dV$$

$\partial\Omega \to$ frontera

Recuerdo Definición de Integral de flujo. Sea S una superficie regular orientable, $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de normales continuo sobre S, y $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido sobre un abierto Ω que contiene a S. Se define la integral de flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S orientada según $\hat{n}$ mediante

Arriba

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iint_D \vec{F}(\vec{\varphi}(u,v)) \cdot \underbrace{\frac{\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}}{\cancel{\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|}}}_{\hat{n}} \underbrace{\cancel{\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|} du\, dv}_{dA} = \iint_D \vec{F}(\vec{\varphi}(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u,v) \right] du\, dv$$

donde $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S compatible con la orientación, esto es tal que

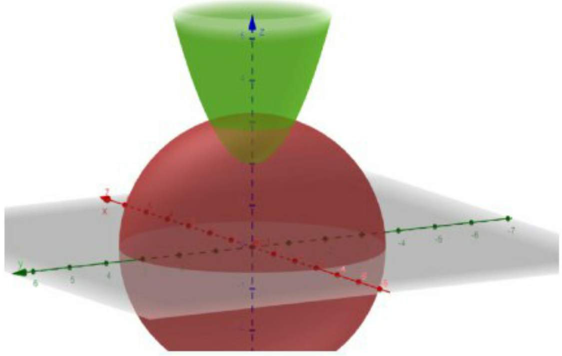
$$\hat{n} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|$$

#

1

P1.- Calcule el flujo del campo vetorial $\vec{F} = (x, y, z)$ que sale del sólido limitado por las superficies:

$$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = 10}_{\text{Esfera}} \wedge \underbrace{z = 2 + x^2 + y^2}_{\text{paraboloide}}$$

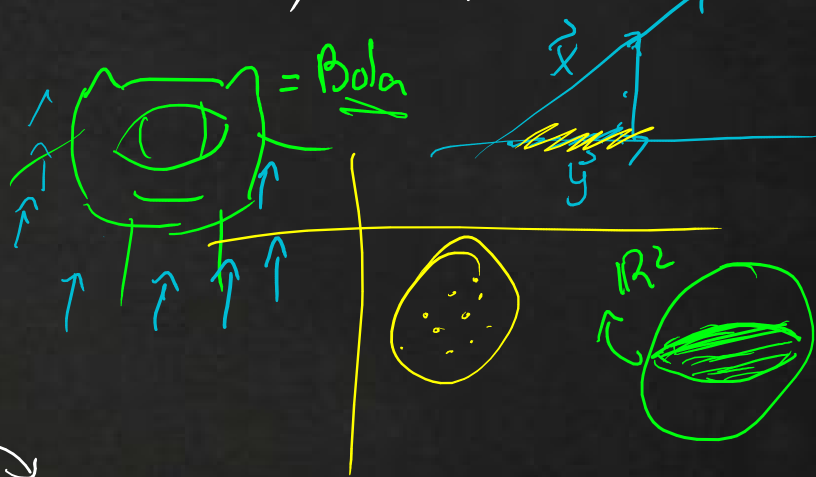


Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

① Flujo $= \iint \vec{F} \cdot \vec{dS}$ si la superficie es cerrada

2) Flujo $= \oiint \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iiint \operatorname{div}(\vec{F}) \cdot dV$; $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$

Calculemos $\operatorname{div}(\vec{F})$



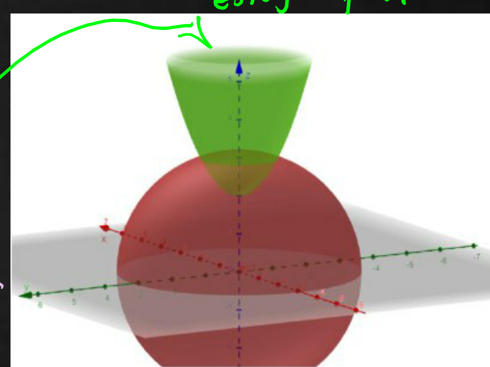
$\vec{F} = (x, y, z)$

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3 \,//$$

$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3$

③ Flujo $= \iiint \operatorname{div}(F)\, dV = 3 \iiint dV$

estoy aquí



Esfera =

Superficie

Paraboloide =

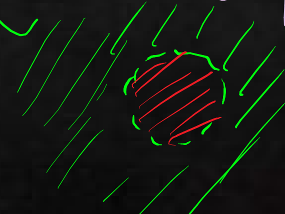
Ecuación

$x^2 + y^2 + z^2 = 10$

Ecuación

$z = 2 + x^2 + y^2$

Veamos por arriba

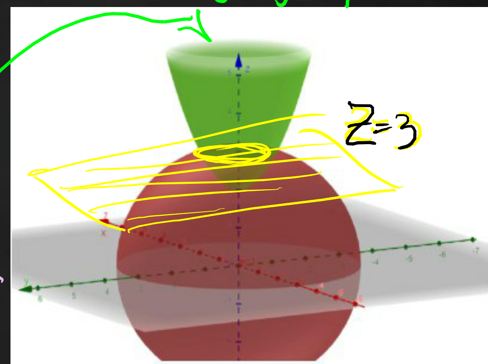


$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3 \,//$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3$$

③ $\text{Flujo} = \iiint \operatorname{div}(F)\,dv = 3\iiint dv$

estoy aquí



Esfera = Superficie

Paraboloide =

Ecuación

$x^2 + y^2 + z^2 = 10$

Ecuación

$z = 2 + x^2 + y^2$

Veamos por arriba

Parametrizemos con cilíndricas

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \\ z &= z \end{aligned}\right\}$$

$\text{factor escala} = r \,//$

$x^2 + y^2 = r^2$

Veamos que arriba de esfera y abajo tengo paraboloide luego. $\boxed{z = 2 + x^2 + y^2} = 2 + r^2$

$\underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} + z^2 = 10 = r^2 + z^2 = 10 \Rightarrow \boxed{z = \sqrt{10 - r^2}}$

Recapitulemos 1) $\boxed{\underbrace{2 + r^2}_{\text{Paraboloide}} \le z \le \underbrace{\sqrt{10 - r^2}}_{\text{esférico.}}}$

Intersectemos con

1) $z = 2 + r^2 \;\wedge\; 2)\; r^2 + z^2 = 10$

$z - 2 = r^2 \Rightarrow z - 2 + z^2 = 10$

$\Rightarrow z = 3 \;\vee\; \cancel{z = -4}$

Ec. cuadrática

pues $z = -4$? yo no vivo acá

radio Carolina (máximo)

1) $z = 2 + r^2 \Big|_{z=3} \Rightarrow 3 = 2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 1 \;;\; r \in (0, \infty+)$

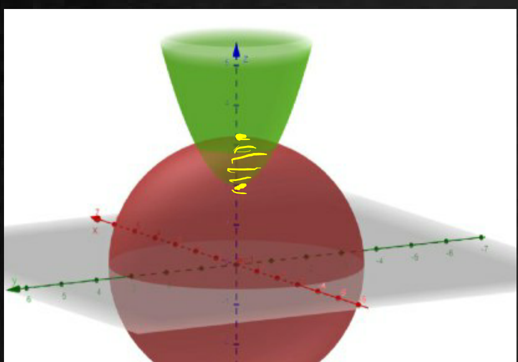
1) $\underbrace{2+r^2}_{\text{Paraboloide}} \le z \le \underbrace{\sqrt{10-r^2}}_{\text{esférico.}}$

2) $0 < r \le 1 \Longrightarrow$ facto escala

3) $0 \le \theta \le 2\pi$

Volvamos Flujo $= 3\iiint_\Omega dv$

Cambiando coordenadas cilíndricas



$$3\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{2+r^2}^{\sqrt{10-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Fubini.

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr \left(\int_{2+r^2}^{\sqrt{10-r^2}} dz\right)$$

$$= 6\pi \int_0^1 r\cdot z \Big|_{2+r^2}^{\sqrt{10-r^2}} dr$$

$$= 6\pi\int_0^1 \left(r\sqrt{10-r^2} - 2r - r^3\right) dr$$

$$= 6\pi\left[\int_0^1 r\sqrt{10-r^2}\,dr - 2\int_0^1 r\,dr - \int_0^1 r^3\,dr\right]$$

$$= 6\pi\left[\frac{-(10-r^2)^{3/2}}{3}\Big|_0^1 - \underbrace{\frac{2r^2}{2}\Big|_0^1}_{1} - \underbrace{\frac{r^4}{4}\Big|_0^1}_{1/4}\right]$$

$$= 6\pi\left(-9\sqrt{3} + 10\sqrt{10} - 1 - \frac{1}{4}\right)$$

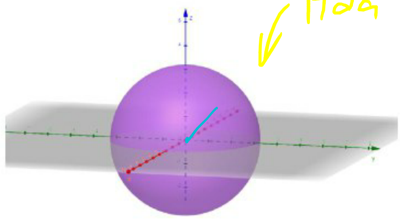
$$\left(\frac{-(10-r^2)^{3/2}}{3}\right)'$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{-(10-r^2)^{1/2}}{3}\cdot -2r$$

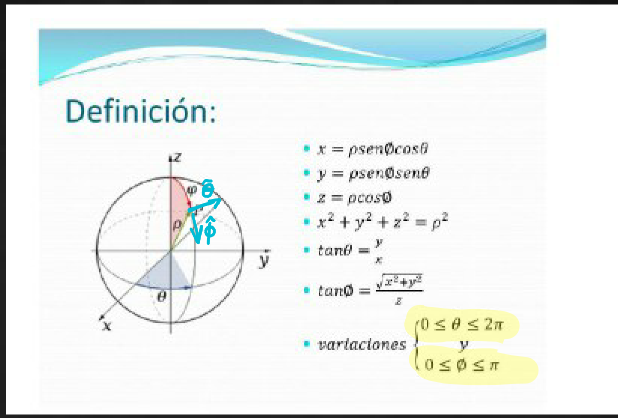
$$= r\sqrt{10-r^2}$$

P2.- Verificar el teorema de la divergencia para el campo vectorial $\vec{F} = |r|\hat{r}$ y la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$



Hola soy la esfera



Teorema de la Divergencia de Gauss.
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** sobre un abierto $U \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} div(\vec{F})\, dV$$

$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A}$ Tienes una esfera

Luego $\vec{F} = \|r\| r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot(x,y,z)$

$f(\phi,\theta) = (9\,sen(\phi)\cos(\theta),\ 9\,sen(\phi)\,sen(\theta),\ 9\cos(\phi))$

$r_\phi \times r_\theta = (9\,sen^2(\phi)\cos(\theta),\ 9\,sen^2(\phi)\,sen(\theta),\ 9\,sen(\phi)\cos(\phi))$

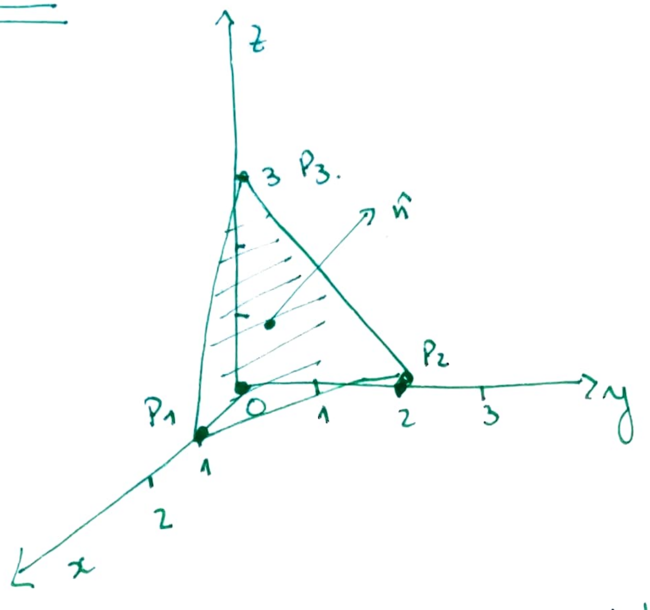
¡Continuará!

Ya terminamos!

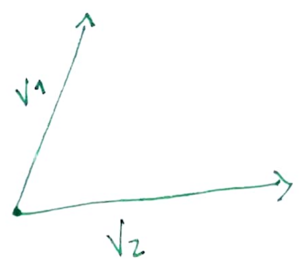
Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl

Ejercicio #4. Calcular la Integral de Flujo del Campo $\vec{F}(x,y,z) = 2x\hat{\imath} + yx\hat{\jmath} + zx\hat{k}$ a través del triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$. Precise la orientación.

Sol:



Parametrización 1: Forma vectorial de la ecuación del plano.



Punto por donde pasa el plano

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= P_3 - P_1 \\ V_2 &= P_2 - P_1 \end{aligned}\right\} \text{ Vectores directores.}$$

Forma vectorial : $L(s,t) = s\left(P_3 - P_1\right) + t\left(P_2 - P_1\right) + P_1$

Luego,

$$(1).\quad L(s,t) = \left(-s-t+1, 2t, 3s\right). \quad , \quad \underbrace{s,t\in\mathbb{R}}$$

Así, describes todo el plano, sin embargo solo te interesa una porción del mismo (Debes restringir s y t).

Note que (1) es una parametrización para el Δ, después de restringir adecuadamente s,t (Ejercicio).

También podemos a partir de (1) obtener la ~~ec~~ ecuación del plano en coordenadas cartesianas, esto es:

$$L(s,t) = (-s-t+1, 2t, 3s) = (x,y,z)$$

$$\Updownarrow$$

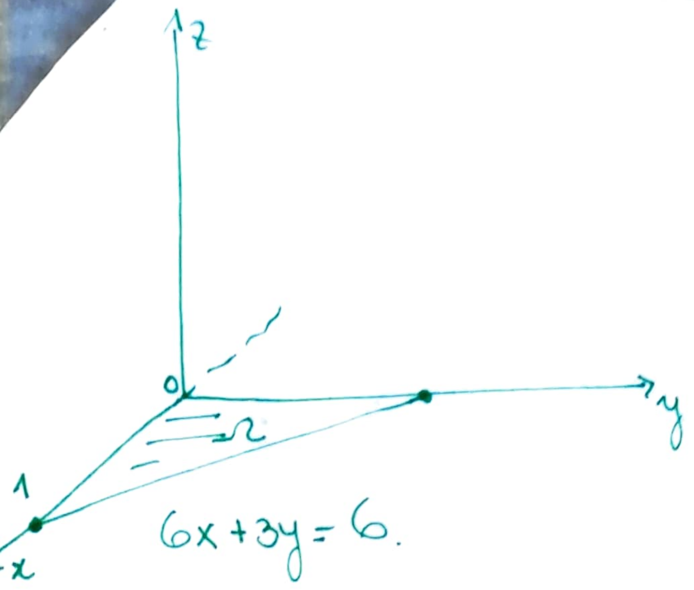
$$\boxed{6x+3y+2z=6}$$

(Verifica que pasa por los puntos indicados.)

Otra parametrización del Δ, la llamaré

$$\Gamma(x,y) = \left(x,y, \frac{6-6x-3y}{2}\right), \quad (x,y)\in \underbrace{\Omega}.$$

Veamos la descripción de Ω



$$\Omega = \left\{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2-2x \right\}.$$

Luego, $\quad T(x,y) = \left(x, y, 3 - 3x - \frac{3}{2}y \right),$

$(x,y) \in \Omega.$

Vector Normal:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \times \frac{\partial T}{\partial y} \right)(x,y) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 3\hat{\imath} + \frac{3}{2}\hat{\jmath} + \hat{k}.$$

Finalmente, el flujo viene dado por

$$\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_\Omega F(T(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \times \frac{\partial T}{\partial y} \right)(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \iint_\Omega F\left(x, y, 3 - 3x - \frac{3}{2}y \right) \cdot \left(3, \frac{3}{2}, 1 \right) dx\, dy$$

$$= \iint_{\Omega} \left(9x - 3x^2\right) d\Omega. \qquad \text{(Terminar)}$$

(~~[illegible]~~ Cambiar el orden de Integración).

Ejercicio:

Sea S la parte del cilindro parabólico $z = 3-2x^2$ que queda por encima del paraboloide $z = x^2+3y^2$, y sea γ la curva intersección de ambos. Calcular la circulación del campo $F(x,y,z) = (-yz, xz, xy)$ a lo largo de γ.

(a) Directamente

(b) Usando el Teorema de Stokes (Considere S orientada por la normal con componente $z>0$).

Sol:

(a) Note que los puntos del plano donde las dos superficies son iguales (Tienen igual altura) son soluciones del sistema

$$\begin{cases} z = x^2+3y^2 \\ z = 3-2x^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=1}$$

Ojo: Esta es ~~la eq~~ proyección de la curva γ sobre el plano XY.

De acá deducimos que

$$\gamma(t) = \left(\cos(t), \sin(t), 3-2\cos^2(t)\right), \quad t\in[0,2\pi].$$

La circulación del campo a lo largo de γ viene dada por la Integral de Línea

$$\int_\gamma F\cdot dr = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot \gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4\cos^2(t) \bullet \sin^2(t) + 3 - 2\cos^2(t)\right) dt$$

$= 5\pi.$

(b) La superficie S es la parte del cilindro parabólico $z = 3-2x^2$ cuya proyección sobre el plano XY es el disco unidad. Esto es, S es la gráfica siguiente $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ z = 3-2x^2\}$

Podemos describir S en coordenadas polares como

$$S = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ z = 3-\rho^2\cos^2(\theta)\}.$$

Por lo tanto, la parametrización es

$$\Gamma(r,\theta) = \left(r\cos(\theta), r\sin(\theta), 3 - r^2\cos^2(\theta)\right)$$

Con $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$.

Luego,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial r} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = \left(4r^2\cos(\theta), 0, r\right)$$

Nótese que la componente z del vector normal es positiva, por lo que la orientación correspondiente de la superficie S induce en la curva frontera r la orientación que usamos anteriormente.

Note también que $\mathrm{rot}(F) = (0, -2y, 2z)$.

Por el Teorema de Stokes tenemos

$$\underbrace{\int_r F \cdot dr}_{\text{Apartado Anterior}} = \iint_S \mathrm{roT}(F) \cdot dS$$

solo nos enfocamos en calcular

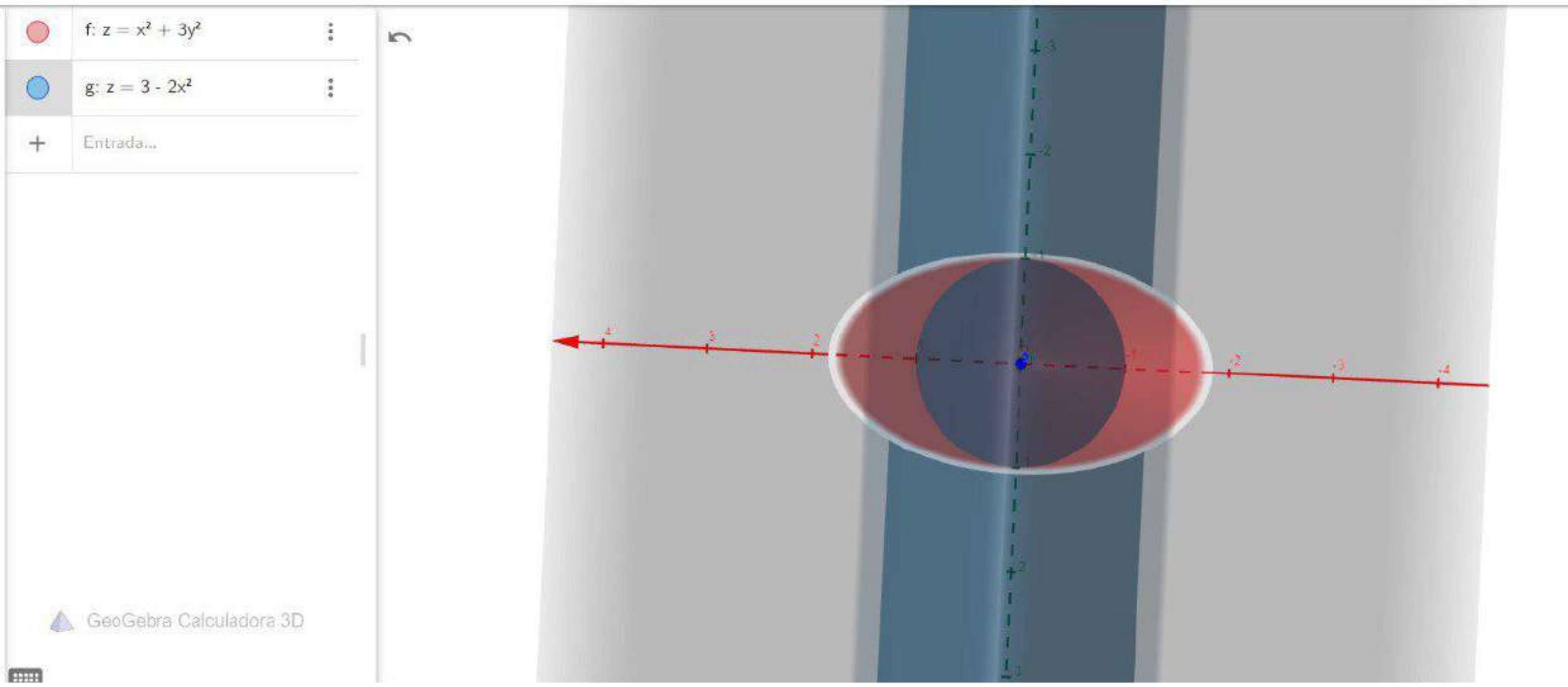
Así,

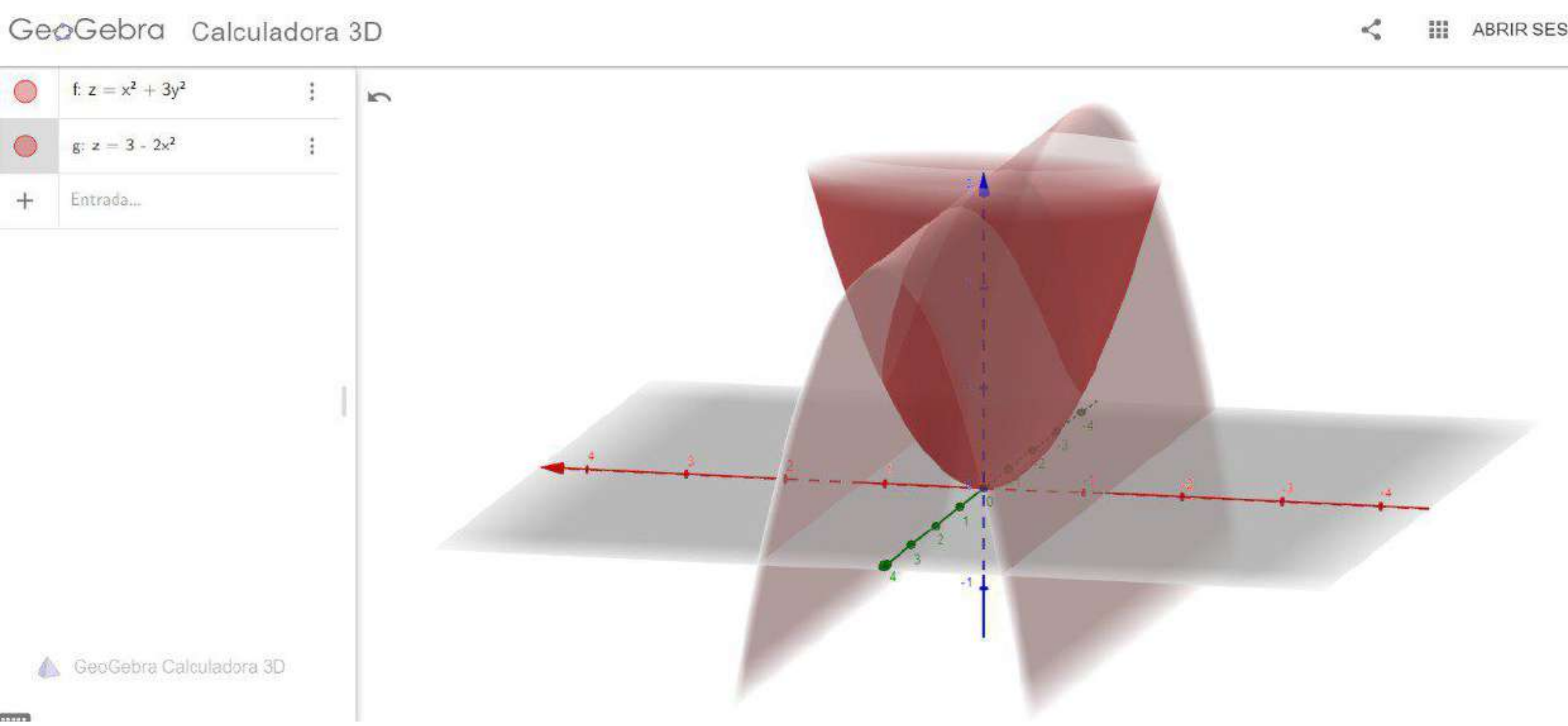
$$\iint_S \mathrm{roT}(F) \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathrm{roT}\left(F\left(T(r,\theta)\right)\right) \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \times \frac{\partial T}{\partial \theta} \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\left(3 - 2r^2\cos^2(t)\right) dr \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(6r - 4r^3\cos^2(t)\right) dr \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 3r^2 - r^4\cos^2(t) \Big|_{r=0}^{r=1} dt = 5\pi.$$

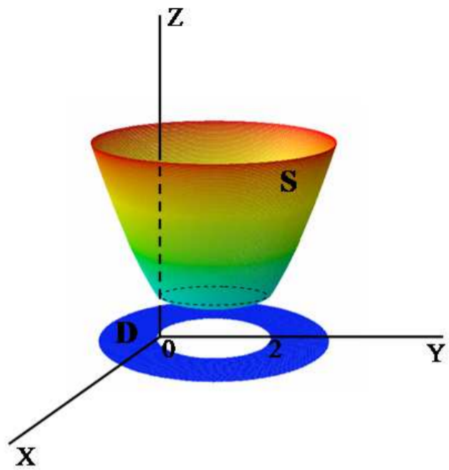

f: $z = x^2 + 3y^2$
g: $z = 3 - 2x^2$
Entrada...
GeoGebra Calculadora 3D


GeoGebra Calculadora 3D
ABRIR SES
f: z = x² + 3y²
g: z = 3 - 2x²
Entrada...
GeoGebra Calculadora 3D

MA2002-2-4 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Argenis Mendez + Carlos Conca
Auxiliar: Pato Yáñez—CROSSOVER—Luis Fuentes y Eybie Hernández

TPCAA=TODOS PASAMOS CALCULO AVANZADO Y APLICACIONES 1

P1.- Halle el área de la porción de la superficie $z = x^2 + (y-1)^2$ comprendida entre los planos $z = 1$ y $z = 4$



P2.- Se pide considerar la curva Γ parametrizada por $\sigma(t) = (e^t\cos(t), e^t\operatorname{sen}(t), e^t), t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{P2 (a)}}$ Se pide demostrar que la curva se mueve sobre el manto del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

$\boxed{\textbf{P2 (b)}}$ Determine cuáles de los siguientes campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ son conservativos y calcule la divergencia de su gradiente en cada caso:
¿Esto qué representa gráficamente?

$$\overrightarrow{F}_1(x,y,z) = \left(\frac{y}{z^2+4}, \frac{x}{z^2+4}, -\frac{2xyz}{z^4+8z^2+16}\right),$$

$$\overrightarrow{F}_2(x,y,z) = (y^2, x, x).$$

P3.- Calcule el área de una esfera cualquiera de radio $r = 1$, a través de la parametrizacipon es esférica y en coordenadas paramétricas.
Recordar coordenadas paramétricas $\overrightarrow{r}(u,v) = (sen(u)cos(v), sen(u)sen(v), cos(v))$ y
$r_u \times r_v = \hat{\imath}sen^2(u)cos(v) + \hat{\jmath}sen^2(u)sen(v) + \hat{k}sen(u)cos(u)$
Recordar coordenadas cartesianas $\overrightarrow{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ y
$r_x \times r_y = \hat{\imath}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \hat{\jmath}\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \hat{k}$

recordar que u,v son ortogonales al igual que x e y, como vectores.

Tiene 2 horas para poder desarrollar la simulación de control, una vez terminado el tempo marcan hasta donde llegaron y si quieren siguen desarrollando.

¿Cómo te sientes?

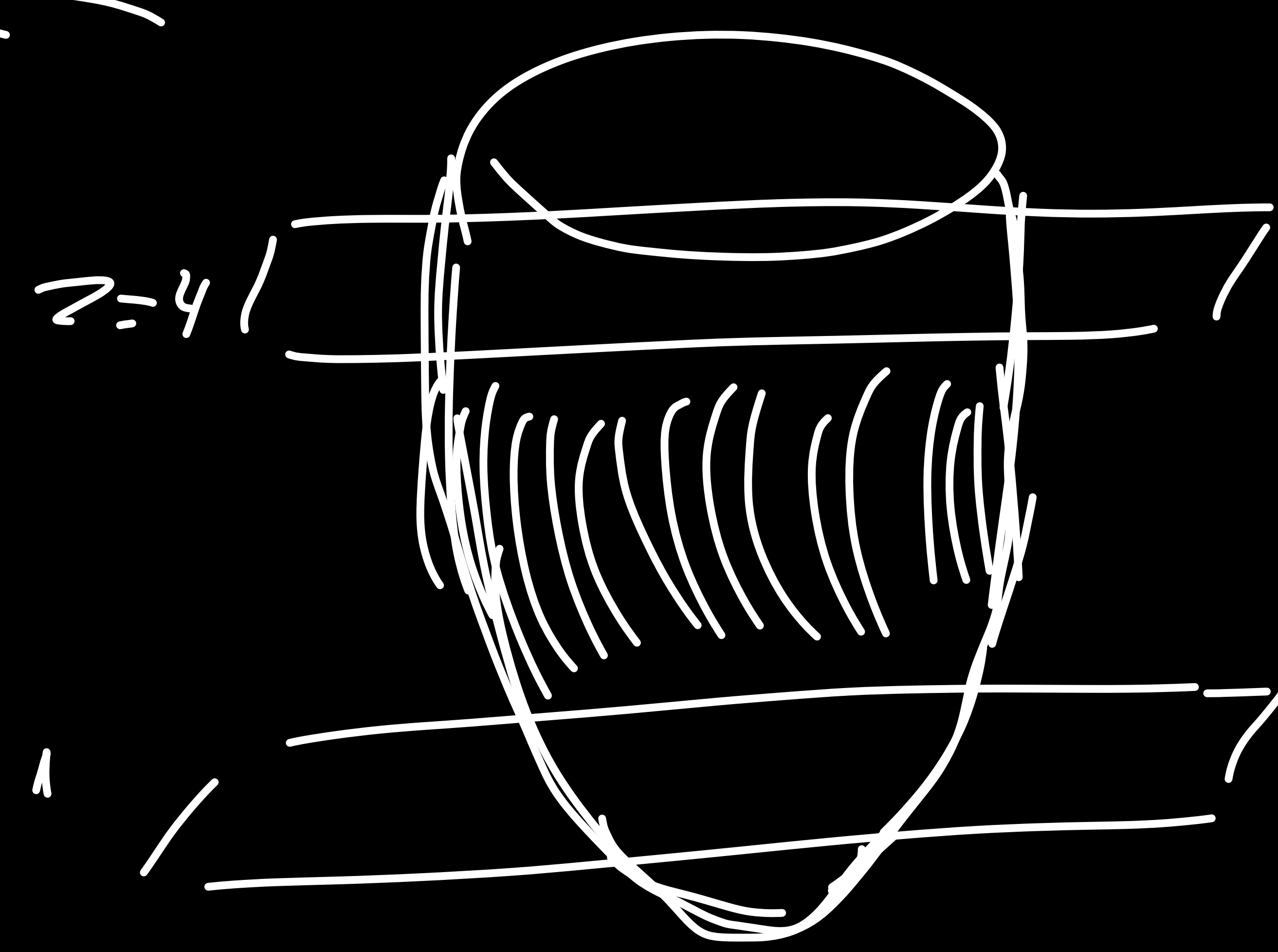
Mentimeter

motivado
ahogado
hachaama
this isthe worstweek ev
preparada
me funan las integrales
la primera materia ayuda
shipeo al pato y al lucho
con la cabeza media frita
pera chiguals
preaparao pa matraquear
cansada
poco preparada
con ganas de aprender
como el pico en teoremas
tranquila
siento que me ira pesimo
saddest moments in anime
distraido
en pálida
angustiade
de la canica
nervioso
animada
se dice marraqueta
mal con m de mal v
pal dick
ansioso
crossover
como la corneta
quiero llorar
con sueño
no se integrar xd
el que nada sabe nadateme
muy mal
falto de estudio uwu
cómic sans
perdido
aburrido
fino
aun se salva
preparado
hay otra opcion
diosesmiguia
con tuto
luisxpato
zundada
maoma
luisxpatoluisxpato
more or less
estresado
aaaaah
para un 5
cansado
triste
con sed
de pana
vuaaaaamosssss
inseguro
del totodile
con pera
bn
xd
muerto
con dolor de espalda
bien en general
como
re piola
solo
o la rajo o me rajan
despues del control
piola
a
cvv
el
mal
ano
bien
hasta el picο
ayua
más o menos
palpico
panik
depre
más o menos en área
indiferente
todo
perón
me eche caa
efe
xata
pera
muy nerviosa
ooohhhhhh
dios es mi pastor
pucha piola re tranca
falta piscola
estresadisimo
de la perra
help
me duele todo el brazo
como el ano
sin saber parametrizar
peron
solo hay 2 opciones
estresada
el pepe
bien en calculo vectorial
pal pico
me siento solo
mal parametrizado
parametrización
como el pico
no sé nada
ansiosa
yo me tomo la chelita
aunque me divierto con el
o me rajan o la rajo no
quien chucha invento caa
cansao
optimista
mal escalado
relajado
entusiasmado
nerviosa
de la canina
con la pera
postre
desmotivado
ayuda

191

$$z = x^2 + (y-1)^2$$

$$z = 1, \quad z = 4.$$



① Parametrizar:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y-1 = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta + 1 \end{cases}$$

$$z = x^2 + (y-1)^2$$

$$= \rho^2\cos\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta = \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= \rho^2$$

$$\varphi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta + 1, \rho^2)$$

$$\rho \in [1,2]$$

✓ 2/2

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$\boxed{1 \le z \le 4} \Rightarrow 1 \le \rho^2 \le 4 \;/\sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow 1 \le \rho \le 2$$

$\varphi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta + 1, \rho^2)$

2 Derivar parametrización:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = (\cos\theta, \sin\theta, 2\rho)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, 0)$$

3 $\times$ y $\|\times\|$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 2\rho \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\sin\theta, \begin{matrix}\rho\sin^2\theta + \\ \rho\cos^2\theta\end{matrix}\right)$$

$$= (-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\sin\theta, \rho)$$

$$\|\partial_\rho \varphi \times \partial_\theta \varphi\|$$

$$= \sqrt{(-2\rho^2\cos\theta)^2 + (-2\rho^2 \operatorname{sen}\theta)^2 + \rho^2}$$

$$= \sqrt{4\rho^4\cos^2\theta + 4\rho^4\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2}$$

$$= \sqrt{4\rho^4(\overbrace{\cancel{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}}^{1}) + \rho^2}$$

$$= \sqrt{\rho^2(4\rho^2+1)}$$

$$= \rho\sqrt{4\rho^2+1} \quad \square$$

4 Integramos:

$$A = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \rho\sqrt{4\rho^2+1}\, d\rho\, d\theta$$

$$\boxed{u = 4\rho^2+1} \qquad du = 8\rho\, d\rho \qquad \boxed{\frac{du}{8} = \rho\, d\rho}$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int \sqrt{u}\, \frac{du}{8}\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\left(\int \sqrt{u}\, du \right) d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{8}} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2}\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{12} \cdot (4r^2+1)^{3/2} \Big|_1^2 d\theta$$

$$\cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{12}} \cdot \left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$$

$$\therefore \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$$

* 1° dependiente luego independiente

$$\vec{F} = \nabla \phi$$

$$\downarrow \quad (z^2+4)^2$$

$$F = \left(\underbrace{\frac{y}{z^2+4}}_{\frac{\partial \phi}{\partial x}\ F_1}, \underbrace{\frac{x}{z^2+4}}_{F_2\ \frac{\partial \phi}{\partial y}}, \underbrace{\frac{-2xyz}{z^4+8z^2+16}}_{F_3} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{y}{z^2+4} \quad / \int dx$$

$$\boxed{\phi = \frac{xy}{z^2+4} + C(y, z)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{z^2+4} + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = \frac{x}{z^2+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 0 \quad / \int dy$$

$$\Rightarrow C(y,z) = C(z)$$

$$\boxed{\phi = \frac{xy}{z^2+4} + C(z)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \cancel{\frac{-2zxy}{(z^2+4)^2}} + \frac{\partial C(z)}{\partial z} = \cancel{\frac{-2xyz}{(z^2+4)^2}}$$

$$\frac{\partial C(z)}{\partial z} = 0 \quad / \int dz$$

$$C(z) = C \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\phi = \frac{xy}{z^2+4} + C \qquad C=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = \frac{xy}{z^2+4}}$$

$\therefore \bar{F}$ es conservativo

$\blacksquare$

(y^2, x, x)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 \quad / \int dx$$

$$\phi = xy^2 + C(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = x - 2xy \quad / \int dy$$

$$\Rightarrow \boxed{C(y,z) = xy - xy^2}$$

$$\phi = xy + C(z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y \neq y^2 = \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \ddots & \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{F} = \nabla \phi}$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

P3.- Calcule el área de una esfera cualquiera de radio $r = 1$, a través de la parametrizacipon es esférica y en coordendas paramétricas.

Recordar coordenadas paramétricas $\vec{r}(u,v) = (sen(u)cos(v), sen(u)sen(v), cos(v))$ y
$r_u \times r_v = \hat{i}sen^2(u)cos(v) + \hat{j}sen^2(u)sen(v) + \hat{k}sen(u)cos(u)$

Recordar coordenadas cartesianas $\vec{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ y
$r_x \times r_y = \hat{i}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \hat{j}\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \hat{k}$

recordar que u,v son ortogonales al igual que x e y, como vectores.

1) Recordemos esféricas $h_\rho h_\theta \cdot h_\phi = \rho^2 \sin(\phi)$

qué pasa si $\rho = 1 \Rightarrow 1 \cdot \sin(\phi) = \sin(\phi)$

1) $\vec{F}(u,v) = (\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v))$

2) $r_u \times r_v = (\sin^2(u)\cos(v), \sin^2(u)\,sen(v), sen(u)\cos(u))$

$\quad \| \quad \dfrac{\partial \vec{F}(u,v)}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{F}(u,v)}{\partial v}$

$\# \iint_S f \, dS = \iint_D \underbrace{f(\vec{F}(u,v))}\, \underbrace{\| r_u \times r_v \|}\, du\, dv$

$f = 1$

$= \iint_D \| r_u \times r_v \| \, du\, dv$

$$\| r_u \times r_v \| = \sqrt{sen^4(u)\cos^2(v) + sen^4(u)sen^2(v) + sen^2(u)\cos^2(u)}$$

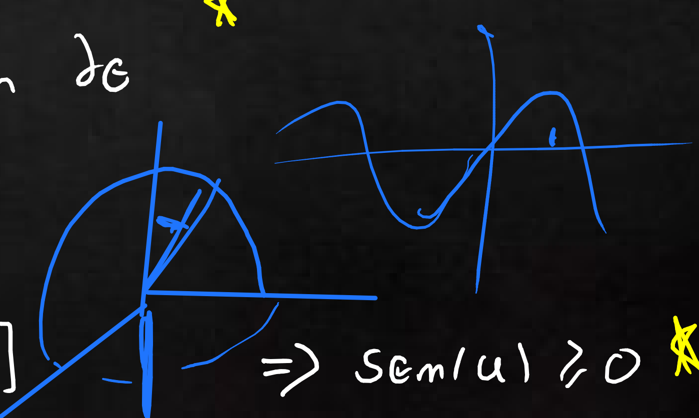
$$= \sqrt{sen^2(u)[\underbrace{\cos^2(v) + sen^2(v)}_{1}] + [sen^2(u)\cos^2(u)]}$$

$$= \sqrt{sen^2(u)(\underbrace{sen^2(u) + \cos^2(u)}_{1})} \quad u \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$\| r_u \times r_v \| = \sqrt{sen^2(u)} = |sen(u)| \overset{*}{=} sen(u) \,//$$

Voy a calcular el área de media esfera y luego la multiplico $\cdot 2$.

entonces $u \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$ $\Rightarrow sen(u) \geq 0$ *



1

$$\iint_D 1\cdot \operatorname{sen}(u)\,du\,dv = \quad \text{media esfera}$$

$$A(\ ) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(u)\,du\,dv$$

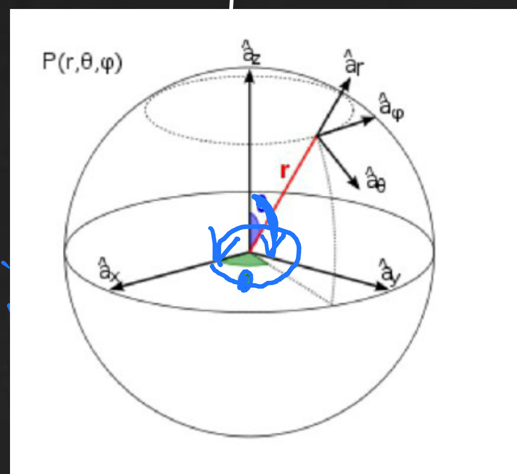
↓ Fubinni:

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dv \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(u)\,du$$

$$= v\Big|_0^{2\pi} \left(-\cos(u)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\pi\cdot\left[-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - -\cos(0)\right]$$

$$A(\ ) = 2\pi\,[0+1] = 2\pi$$



Luego ⇒ $A(\ ) = 2\cdot A(\ )$

$$= 4\pi$$

Área esfera $4\pi r^2$, $r = 1$

$4\pi\cdot 1 = 4\pi$

Recordar coordenadas cartesianas $\vec{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ y

$$r_x \times r_y = \hat{\imath}\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \hat{\jmath}\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \hat{k}$$

recordar que u,v son ortogonales al igual que x e y, como vectores.

Nos debe dar $A(\bigcirc) = 4\pi$

$x^2+y^2+z^2 = 1$

$\Rightarrow z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$\vec{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$

$$\iint_D f(\vec{r}(x,y)) \, \|r_x \times r_y\| \, dx\,dy$$

$$\|r_x \times r_y\| = \sqrt{\frac{x^2}{(1-x^2-y^2)} + \frac{y^2}{(1-x^2-y^2)} + 1}$$

$$1 = \frac{1-x^2-y^2}{1-x^2-y^2} \Rightarrow = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + \frac{1-x^2-y^2}{1-x^2-y^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \|r_x \times r_y\|$$

En lo que íbamos

#Pasaré el ramo

$$A(\bigcirc) = \iint_S dS = \iint_D \frac{1 \cdot dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

no lo puedo separar

a coordenadas polares.

$D \Downarrow$ Esfera unitaria,

$x = \rho\cos(\theta)$

$y = \sin(\theta)$

$$\text{Fubini} \Downarrow = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{(1-\rho^2)^{1/2}} \cdot \rho \, d\rho\, d\theta.$$

$$\# \left(-(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2\rho$$

$$= (1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\rho$$

$$\# \quad = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}} \rho \, d\rho$$

③

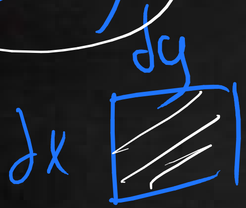
$$= 2\pi \cdot \left[-(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1$$

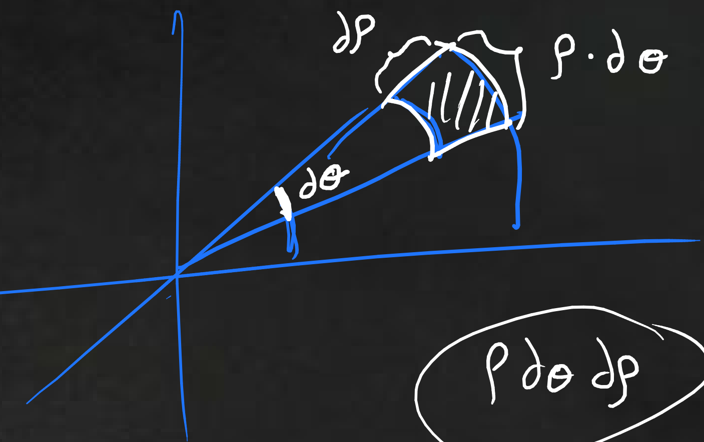
$$= 2\pi \cdot \left[-\cancel{(1-1)^{\frac{1}{2}}}^{\,0} - (1-0)^{\frac{1}{2}}\right] = 2\pi = A(\bigcirc)$$

$$\Rightarrow A(\bigcirc) = 4\pi$$

$dx\,dy$

$\rho\, d\rho\, d\theta$





$\rho\, d\theta\, d\rho$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

P2.- Se pide considerar la curva Γ parametrizada por $\sigma(t) = (e^t\cos(t), e^t\operatorname{sen}(t), e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

P2 (a) Se pide demostrar que la curva se mueve sobre el manto del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

P2 (b) Determine cuáles de los siguientes campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ son conservativos y calcule la divergencia de su gradiente en cada caso:
¿Esto qué representa gráficamente?

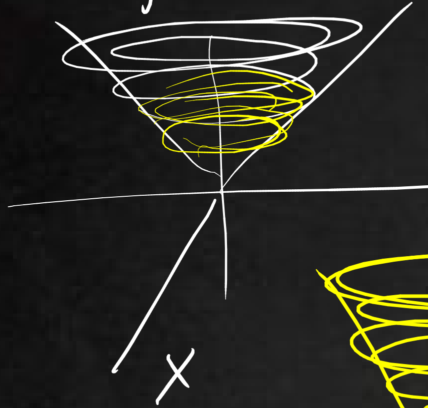
$$\vec{F}_1(x,y,z) = \left(\frac{y}{z^2+4}, \frac{x}{z^2+4}, -\frac{2xyz}{z^4+8z^2+16}\right),$$

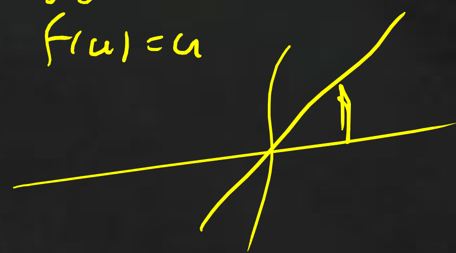
$$\vec{F}_2(x,y,z) = (y^2, x, x).$$

$x^2+y^2 = z^2 \longrightarrow$ Polares $\rho^2 = x^2+y^2$ $\quad f(x)=x$

$\rho^2 = z^2$ $\quad f(u)=u$

$\rho \geq 0$ $\quad \rho = z$





$\sigma(t) = (e^t\cos(t), e^t\sin(t), e^t) = e^t\underline{(\cos(t), \sin(t), 1)}$

$t\in\mathbb{R}$; $\Gamma := \{\sigma(t) = (e^t\cos(t), e^t\sin(t), e^t), \forall t\in\mathbb{R}\}$

$\#\ A\subseteq B \iff \forall x\in A \Rightarrow \forall x\in B$

$M : \{x,y,z\in\mathbb{R}$ tq $x^2+y^2=z^2\}$

$\forall \vec{x}\in\Gamma, \exists t\in\mathbb{R}$ tq $\vec{x} = (\underbrace{e^t\cos(t)}_{x}, \underbrace{e^t\sin(t)}_{y}, e^t)$

luego basta ver $\in\Gamma$

$\Rightarrow x^2+y^2 = (e^t\cos(t))^2 + (e^t\sin(t))^2, \forall t\in\mathbb{R}$

$= e^{2t}[\cos^2(t) + \sin^2(t)], \forall t\in\mathbb{R}$

$= e^{2t} = (e^t)^2 = \underline{z^2} \therefore \forall\vec{x}\in\Gamma \Rightarrow \vec{x}\in M \quad \forall t\in\mathbb{R}$ //

P2b) Vea si son conservativos

1) $\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$ $\Leftarrow$ $\Longleftrightarrow$

2) $\vec{F} = -\vec{\nabla}\rho$; ρ Escalar $\Rightarrow \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\ell$ $\Longleftrightarrow$

3) $\int_{C_1} \vec{F}\, d\ell = \int_{C_2} \vec{F}\, d\ell$ $\Longleftrightarrow$

Laplaciano $\longrightarrow$ Escalar

$\Rightarrow$ "segunda derivada"

"dirección ascenso más pronunciado"

Δf ; $\Delta \vec{A}$: $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$

$\downarrow$ Escalar ; $\downarrow$ campo vectorial

$= \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$

- sup f escalar $\Rightarrow$ grad f será vector

$\mathrm{div}(\underbrace{\mathrm{grad}\, f}_{\text{vector}}) \longrightarrow$ escalar

- sup $\vec{A}$ vector grad $\vec{A}$ $\Rightarrow$ div(grad($\vec{A}$)) $\to$ Escalar

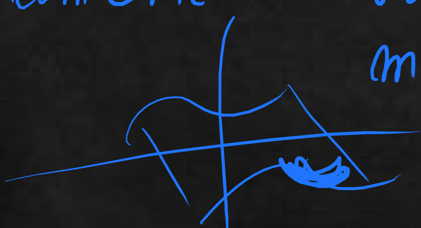
Gráficamente

mínimo

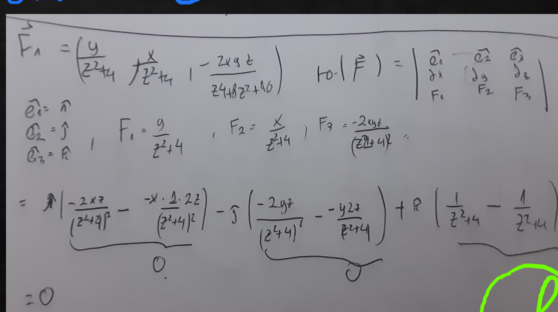
valle $\to$ sale $\to$ div > 0

monte $\to$ entra $\to$ div < 0

$\hookrightarrow$ máxima



$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \in \mathbb{R} \quad \text{Escalar}$$



$$\vec{F}_1 = \left(\frac{y}{z^2+4}, \frac{x}{z^2+4}, \frac{-2xyz}{z^4+8z^2+16}\right) \qquad \mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$\hat{e}_1 = \hat{\imath}$, $\hat{e}_2 = \hat{\jmath}$, $\hat{e}_3 = \hat{k}$, $F_1 = \frac{y}{z^2+4}$, $F_2 = \frac{x}{z^2+4}$; $F_3 = \frac{-2xyz}{(z^2+4)^2}$

$$= \hat{\imath}\underbrace{\left(\frac{-2xz}{(z^2+4)^2} - \frac{-x\cdot 1\cdot 2z}{(z^2+4)^2}\right)}_{0} - \hat{\jmath}\underbrace{\left(\frac{-2yz}{(z^2+4)^2} - \frac{-y2z}{z^2+4}\right)}_{0} + \hat{k}\underbrace{\left(\frac{1}{z^2+4} - \frac{1}{z^2+4}\right)}$$

$= 0$

P1. Teorema de Gauss

Considere la región $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ definida por las inecuaciones: $x^2 + y^2 \leq 4, x + 2 \leq z \leq 4$.

a) Esboce la región $\mathcal{R}$ mostrando que su frontera $\partial\mathcal{R}$ está formada por tres superficies diferenciables.

b) Calcule el flujo neto del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x + \cos(yz)}{4}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{y + e^{x+z}}{4}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{x^2 + y^2 + z}{4}\right)\hat{k}$$

que sale por la superficie formada por la unión de las tapas laterales e inferior de $\partial\mathcal{R}$.

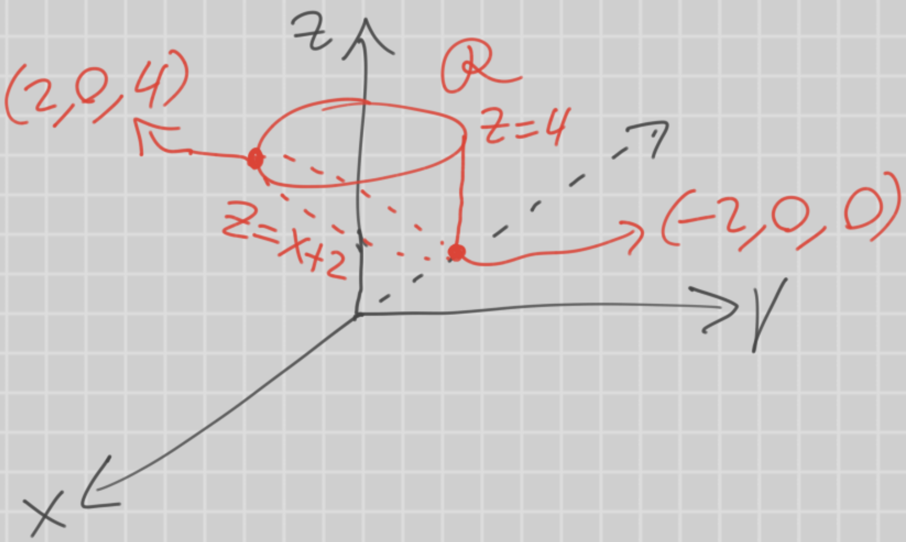
Teorema de la Divergencia de Gauss.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** sobre un abierto $U \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$$

- **Nota 1:** Notar que $\partial\Omega$ es una superficie **cerrada**.
- **Nota 2:** En coordenadas ortogonales el diferencial de volumen es $dV = h_u h_v h_w \, du\, dv\, dw$.

a) $\mathcal{R}$ se encuentra dentro del cilindro de radio 2 y eje $x=y=0$ (eje z) $(x^2+y^2 \leq 4)$ y dentro de los planos $z=x+2$ y $z=4$ $(x+2 \leq z \leq 4)$.



$$\partial\mathcal{R} = T_s \cup T_\ell \cup T_i$$

Tapa superior $\begin{pmatrix} z=4 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{pmatrix}$

Tapa lateral $\begin{pmatrix} x+2 \leq z \leq 4 \\ x^2+y^2 = 4 \end{pmatrix}$

Tapa inferior $\begin{pmatrix} z=x+2 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{pmatrix}$

3 superficies diferenciable

P1. Teorema de Gauss

Considere la región $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ definida por las inecuaciones: $x^2+y^2 \leq 4, x+2 \leq z \leq 4$.

a) Esboce la región $\mathcal{R}$ mostrando que su frontera $\partial\mathcal{R}$ está formada por tres superficies diferenciables.

b) Calcule el flujo neto del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x+\cos(yz)}{4}\right)\hat{i} + \left(\frac{y+e^{x+z}}{4}\right)\hat{j} + \left(\frac{x^2+y^2+z}{4}\right)\hat{k}$$

que sale por la superficie formada por la unión de las tapas laterales e inferior de $\partial\mathcal{R}$.

Teorema de la Divergencia de Gauss.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** sobre un abierto $U \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F})\,dV$$

- **Nota 1:** Notar que $\partial\Omega$ es una superficie **cerrada**.
- **Nota 2:** En coordenadas ortogonales el diferencial de volumen es $dV = h_u h_v h_w\,du\,dv\,dw$.

b) Queremos calcular $\displaystyle\iint_{T_\ell \cup T_i} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA$. Para ello, notemos que:

$$\iint_{T_s} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA + \iint_{T_\ell\cup T_i} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \iint_{\partial\mathcal{R}} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \iiint_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(\vec{F})\,dV$$

$\partial\mathcal{R} = T_s \cup T_\ell \cup T_i$

Teorema de Gauss $(\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3))$

$$\Rightarrow \iint_{T_\ell\cup T_i} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \underbrace{\iiint_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(\vec{F})\,dV}_{(1)} - \underbrace{\iint_{T_s} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA}_{(2)}$$

Calculemos (1) y (2).

P1. Teorema de Gauss

Considere la región $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ definida por las inecuaciones: $x^2 + y^2 \leq 4, x + 2 \leq z \leq 4$.

a) Esboce la región $\mathcal{R}$ mostrando que su frontera $\partial\mathcal{R}$ está formada por tres superficies diferenciables.

b) Calcule el flujo neto del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x + \cos(yz)}{4}\right)\hat{i} + \left(\frac{y + e^{x+z}}{4}\right)\hat{j} + \left(\frac{x^2 + y^2 + z}{4}\right)\hat{k}$$

que sale por la superficie formada por la unión de las tapas laterales e inferior de $\partial\mathcal{R}$.

Teorema de la Divergencia de Gauss.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** sobre un abierto $U \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$$

- **Nota 1:** Notar que $\partial\Omega$ es una superficie **cerrada**.
- **Nota 2:** En coordenadas ortogonales el diferencial de volumen es $dV = h_u h_v h_w\, du\, dv\, dw$.

(1) Calculemos $\iiint_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$:

- $\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (\vec{F}\cdot\hat{i}, \vec{F}\cdot\hat{j}, F\cdot\hat{k})$

$$= \partial_x\left(\frac{x + \cos(yz)}{4}\right) + \partial_y\left(\frac{y + e^{x+z}}{4}\right) + \partial_z\left(\frac{x^2 + y^2 + z}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

- $\mathcal{R} = \{\vec{r}(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) : \rho \in [0,2],\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [\rho\cos\theta + 2, 4]\}$

param. en cilíndricas

- $dV = h_\rho h_\theta h_z\, d\rho\, d\theta\, dz = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$ (en cilíndricas)

$$\Longrightarrow \iiint_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(\vec{F})\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{\rho\cos\theta + 2}^{4} \frac{3}{4}\rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} \rho(2 - \rho\cos\theta)\, d\rho\, d\theta \overset{\dots}{=} 6\pi.$$

P1. Teorema de Gauss

Considere la región $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ definida por las inecuaciones: $x^2 + y^2 \leq 4, x + 2 \leq z \leq 4$.

a) Esboce la región $\mathcal{R}$ mostrando que su frontera $\partial\mathcal{R}$ está formada por tres superficies diferenciables.

b) Calcule el flujo neto del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x+\cos(yz)}{4}\right)\hat{i} + \left(\frac{y+e^{x+z}}{4}\right)\hat{j} + \left(\frac{x^2+y^2+z}{4}\right)\hat{k}$$

que sale por la superficie formada por la unión de las tapas laterales e inferior de $\partial\mathcal{R}$.

Teorema de la Divergencia de Gauss.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** sobre un abierto $U \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$$

- **Nota 1:** Notar que $\partial\Omega$ es una superficie **cerrada**.
- **Nota 2:** En coordenadas ortogonales el diferencial de volumen es $dV = h_u h_v h_w\, du\, dv\, dw$.

(2) Calculemos $\iint_{T_S} \vec{F}\cdot\hat{n}\, dA$.

- $\hat{n} = \hat{k} \Rightarrow \vec{F}\cdot\hat{n} = \dfrac{x^2+y^2+z}{4}$
- $T_S = \{\vec{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 4) : \rho \in [0,2],\ \theta \in [0,2\pi]\}$
- $\vec{F}\cdot\hat{n}(\vec{r}(\rho,\theta)) = \dfrac{\rho^2+4}{4}$
- $dA = \rho\, d\rho\, d\theta$ (en cilíndricas con $z = cte = 4$)

$$\Rightarrow \iint_{T_S} \vec{F}\cdot\hat{n}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \frac{\rho^2+4}{4}\rho\, d\rho\, d\theta = 6\pi.$$

P1. Teorema de Gauss

Considere la región $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ definida por las inecuaciones: $x^2 + y^2 \leq 4, x + 2 \leq z \leq 4$.

a) Esboce la región $\mathcal{R}$ mostrando que su frontera $\partial\mathcal{R}$ está formada por tres superficies diferenciables.

b) Calcule el flujo neto del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x + \cos(yz)}{4}\right)\hat{i} + \left(\frac{y + e^{x+z}}{4}\right)\hat{j} + \left(\frac{x^2 + y^2 + z}{4}\right)\hat{k}$$

que sale por la superficie formada por la unión de las tapas laterales e inferior de $\partial\mathcal{R}$.

Teorema de la Divergencia de Gauss.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** sobre un abierto $U \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$$

- **Nota 1:** Notar que $\partial\Omega$ es una superficie **cerrada**.
- **Nota 2:** En coordenadas ortogonales el diferencial de volumen es $dV = h_u h_v h_w\, du\, dv\, dw$.

Así:

$$\iint_{T_\ell \cup T_i} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iiint_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(\vec{F})\, dV - \iint_{T_s} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA$$

$$= 6\pi - 6\pi = 0$$

P2. Teorema de Stokes

Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\sin(x) - \frac{y}{x^2+y^2}\right)\hat{\imath} + \left(\cos(y) + \frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{\jmath} + \left(1 + \frac{\sec(z)}{z}\right)\hat{k}$$

a) Encuentre el dominio Ω de modo que $\vec{F}$ pertenezca a $C^1(\Omega)$.

b) Pruebe que $\vec{F}$ es irrotacional en Ω.

c) Calcule la integral de trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=1, z=2$ recorrida en el sentido antihorario.

d) ¿Contradice esto el Teorema de Stokes? Justifique su respuesta.

Teorema de Stokes.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie **orientable y regular por pedazos**, cuyo borde ∂S es una curva **cerrada, simple y regular por pedazos**. Si $\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** definido sobre un abierto $U \supseteq S \cup \partial S$. Sea $\hat{n}: S \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S, de tal manera que ∂S sigue la **regla de la mano derecha** con respecto a $\hat{n}$. Entonces se cumple:

$$\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\hat{n}\, dA$$

a) $\vec{F}$ se indefine cuando:

- $x^2+y^2=0 \iff x=y=0 \wedge z\in\mathbb{R}$ (eje z)
- $z=0$ (plano xy)
- $\cos(z) = \frac{1}{\sec(z)} = 0 \iff z = \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Así, $\vec{F}$ es C^1 en $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (\{\text{eje } z\} \cup \{\text{plano } xy\} \cup \{z=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\})$ por álgebra de funciones C^1 ∎

P2. Teorema de Stokes

Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\sin(x) - \frac{y}{x^2+y^2}\right)\hat{\imath} + \left(\cos(y) + \frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{\jmath} + \left(1 + \frac{\sec(z)}{z}\right)\hat{k}$$

a) Encuentre el dominio Ω de modo que $\vec{F}$ pertenezca a $C^1(\Omega)$.

b) Pruebe que $\vec{F}$ es irrotacional en Ω.

c) Calcule la integral de trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=1, z=2$ recorrida en el sentido antihorario.

d) ¿Contradice esto el Teorema de Stokes? Justifique su respuesta.

Teorema de Stokes.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie **orientable y regular por pedazos**, cuyo borde ∂S es una curva **cerrada, simple y regular por pedazos**. Si $\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** definido sobre un abierto $U \supseteq S \cup \partial S$. Sea $\hat{n}: S \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S, de tal manera que ∂S sigue la **regla de la mano derecha** con respecto a $\hat{n}$. Entonces se cumple:

$$\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\hat{n}\, dA$$

b) Sea $(x,y,z) \in \Omega$ arbitrario. PDQ $\operatorname{rot}(\vec{F})(x,y,z) = \vec{0} = (0,0,0)$.

En efecto:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (\vec{F}\cdot\hat{\imath}, \vec{F}\cdot\hat{\jmath}, \vec{F}\cdot\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \sin(x) - \frac{y}{x^2+y^2} & \cos(y) + \frac{x}{x^2+y^2} & 1 + \frac{\sec(z)}{z} \end{vmatrix}$$

$$= 0\cdot\hat{\imath} - 0\cdot\hat{\jmath} + \hat{k}\cdot\underbrace{\left[\frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right]}_{=0} = \vec{0} \blacksquare$$

P2. Teorema de Stokes

Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\sin(x) - \frac{y}{x^2+y^2}\right)\hat{\imath} + \left(\cos(y) + \frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{\jmath} + \left(1 + \frac{\sec(z)}{z}\right)\hat{k}$$

a) Encuentre el dominio Ω de modo que $\vec{F}$ pertenezca a $C^1(\Omega)$.

b) Pruebe que $\vec{F}$ es irrotacional en Ω.

c) Calcule la integral de trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=1, z=2$ recorrida en el sentido antihorario.

d) ¿Contradice esto el Teorema de Stokes? Justifique su respuesta.

Teorema de Stokes.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie **orientable y regular por pedazos**, cuyo borde ∂S es una curva **cerrada, simple y regular por pedazos**. Si $\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** definido sobre un abierto $U \supseteq S \cup \partial S$. Sea $\hat{n}: S \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S, de tal manera que ∂S sigue la **regla de la mano derecha** con respecto a $\hat{n}$. Entonces se cumple:

$$\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\hat{n}\, dA$$

c) La curva descrita C se parametriza por:

$C = \{\vec{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 2) : \theta \in [0, 2\pi]\}$ → en cilíndricas con $\rho = 1$ y $z = 2$

Notar que:

$$\vec{r}\,'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(\theta)) = \left(\sin(\cos\theta) - \sin(\theta), \cos(\sin\theta) + \cos(\theta), 1 + \frac{\sec(2)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}(\theta))\cdot\vec{r}\,'(\theta) = -\sin(\cos\theta)\cdot\sin\theta + \sin^2\theta + \cos(\sin\theta)\cdot\cos\theta + \cos^2\theta$$

$$= 1 - \sin(\cos\theta)\cdot\sin\theta + \cos(\sin\theta)\cdot\cos\theta$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(\theta))\cdot\vec{r}\,'(\theta)\, d\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\, d\theta}_{2\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi} -\sin(\cos\theta)\cdot\cos\theta\, d\theta}_{\substack{\text{C.V. } u = \cos\theta \\ du = -\sin\theta\, d\theta \\ (\theta = 0 \Rightarrow u = 1 \\ \theta = 2\pi \Rightarrow u = 1)}} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\sin\theta)\cdot\cos\theta\, d\theta}_{\substack{\text{C.V. } u = \sin\theta \\ du = \cos\theta\, d\theta \\ (\theta = 0 \Rightarrow u = 0 \\ \theta = 2\pi \Rightarrow u = 0)}}$$

$$= 2\pi + 0 + 0 = 2\pi$$

P2. Teorema de Stokes

Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\sin(x) - \frac{y}{x^2+y^2}\right)\hat{i} + \left(\cos(y) + \frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j} + \left(1 + \frac{\sec(z)}{z}\right)\hat{k}$$

a) Encuentre el dominio Ω de modo que $\vec{F}$ pertenezca a $C^1(\Omega)$.

b) Pruebe que $\vec{F}$ es irrotacional en Ω.

c) Calcule la integral de trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=1, z=2$ recorrida en el sentido antihorario.

d) ¿Contradice esto el Teorema de Stokes? Justifique su respuesta.

Teorema de Stokes.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie **orientable y regular por pedazos**, cuyo borde ∂S es una curva **cerrada, simple y regular por pedazos**. Si $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** definido sobre un abierto $U \supseteq S \cup \partial S$. Sea $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S, de tal manera que ∂S sigue la **regla de la mano derecha** con respecto a $\hat{n}$. Entonces se cumple:

$$\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\hat{n}\,dA$$

d) El Teo. de Stokes nos dice que para cualquier superficie S que tenga como borde a la curva C y para cualquier campo vectorial $\vec{G}$ que sea C^1 en un abierto que contenga a $S \cup C$, se tiene que:

$$\oint_C \vec{G}\cdot d\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}(\vec{G})\cdot\hat{n}\,dA \qquad (*)$$

Ahora, notar que por b): $\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$ en $\Omega \Rightarrow \iint_S \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\hat{n}\,dA = 0$

Sin embargo, por c): $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2\pi$, por lo que $\vec{F}$ no satisface $(*)$.

Esto no contradice el Teo. de Stokes, pues no se cumple la hipótesis de que $\vec{F}$ sea C^1 en un abierto que contenga a $S \cup C$ (cualquier S que tenga a C como borde intersecta al eje z donde $\vec{F}$ no es C^1 por a)).

P3. **Teorema de Green**

Sean $\mathcal{A} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : 1 < ||\vec{r}|| < 2\}, \Sigma_1 = S(0,1)$ y $\Sigma_2 = S(0,2)$ (fronteras interior y exterior de $\mathcal{A}$, respectivamente). Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función en $C^2(\Omega)$, tal que $\overline{\mathcal{A}} \subseteq \Omega$ y:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathcal{A} \\ u = \omega_0 & \text{en } \Sigma_1 \\ \nabla u \cdot \hat{n} + u = 0 & \text{en } \Sigma_2 \end{cases} \tag{1}$$

donde $\omega_0 \geq 0$ es una constante fija y $\hat{n}$ es la normal exterior a $\mathcal{A}$.

a) Utilizando las fórmulas de Green, pruebe que si $v : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función en $C^1(\Omega)$ tal que $v = 0$ sobre Σ_1, entonces:

$$\iiint_{\mathcal{A}} \nabla u \cdot \nabla v dV + \iint_{\Sigma_2} uv dA = 0 \tag{2}$$

b) Utilice (2) para probar que si $\omega_0 = 0$, entonces $\iiint_{\mathcal{A}} ||\nabla u||^2 dV + \iint_{\Sigma_2} u^2 dA = 0$. Concluya que $u = 0$ en $\overline{\mathcal{A}}$ en el caso que $\omega_0 = 0$.

Fórmula de Integración por partes o de Green.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ región abierta y acotada, y campos escalares $f, g \in C^2(\Omega)$. Se tiene la Fórmula de Green o de Integración por partes:

$$\int_{\Omega} f \,\Delta g \, dV = \int_{\partial\Omega} f \,\nabla g \cdot \hat{n} \, dS - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dV.$$

a) Notar que como $u \in C^2(\Omega)$, $v \in C^1(\Omega)$ y $\bar{A} \subseteq \Omega$, entonces por Fórmula de Green en A:

$$0 = \iiint_A v \underbrace{\Delta u}_{\substack{=0 \\ \text{en } A}} dV = \iint_{\partial A} v \nabla u \cdot \hat{m} \, dA - \iiint_A \nabla v \cdot \nabla u \, dV$$

$$= \iint_{\Sigma_1} \underbrace{v}_{\substack{=0 \\ \text{en } \Sigma_1}} \nabla u \cdot \hat{m} \, dA + \iint_{\Sigma_2} v \underbrace{\nabla u \cdot \hat{m}}_{\substack{=-u \\ \text{en } \Sigma_2}} dA - \iiint_A \nabla v \cdot \nabla u \, dV$$

$\partial A = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$$\Rightarrow \iiint_A \nabla u \cdot \nabla v \, dV + \iint_{\Sigma_2} uv \, dA = 0 \; \blacksquare$$

P3. Teorema de Green

Sean $\mathcal{A} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : 1 < \|\vec{r}\| < 2\}$, $\Sigma_1 = S(0,1)$ y $\Sigma_2 = S(0,2)$ (fronteras interior y exterior de $\mathcal{A}$, respectivamente). Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función en $C^2(\Omega)$, tal que $\overline{\mathcal{A}} \subseteq \Omega$ y:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathcal{A} \\ u = \omega_0 & \text{en } \Sigma_1 \\ \nabla u \cdot \hat{n} + u = 0 & \text{en } \Sigma_2 \end{cases} \tag{1}$$

donde $\omega_0 \geq 0$ es una constante fija y $\hat{n}$ es la normal exterior a $\mathcal{A}$.

a) Utilizando las fórmulas de Green, pruebe que si $v : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función en $C^1(\Omega)$ tal que $v = 0$ sobre Σ_1, entonces:

$$\iiint_{\mathcal{A}} \nabla u \cdot \nabla v dV + \iint_{\Sigma_2} uvdA = 0 \tag{2}$$

b) Utilice (2) para probar que si $\omega_0 = 0$, entonces $\iiint_{\mathcal{A}} \|\nabla u\|^2 dV + \iint_{\Sigma_2} u^2 dA = 0$. Concluya que $u = 0$ en $\overline{\mathcal{A}}$ en el caso que $\omega_0 = 0$.

Fórmula de Integración por partes o de Green.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ región abierta y acotada, y campos escalares $f, g \in C^2(\Omega)$. Se tiene la Fórmula de Green o de Integración por partes:

$$\int_\Omega f \, \Delta g \, dV = \int_{\partial\Omega} f \, \nabla g \cdot \hat{n} \, dS - \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, dV.$$

b) Supongamos que $W_0 = 0$. Lo visto en a) se tiene $\forall v \in C^1(\Omega)$ tq $v = 0$ en Σ_1
luego en particular se tiene para $v = u \in C^2(\Omega) \subseteq C^1(\Omega)$ pues
$u = W_0 = 0$ en Σ_1.

$$\underset{\substack{(2)\text{ con}\\ v=u}}{\Rightarrow} \iiint_A \nabla u \cdot \nabla u \, dV + \iint_{\Sigma_2} uu \, dA = 0$$

$$\Rightarrow \iiint_A \underbrace{\|\nabla u\|^2}_{\geq 0} dV + \iint_{\Sigma_2} \underbrace{u^2}_{\geq 0} dA = 0$$

$\Rightarrow \|\nabla u\|^2 = 0$ en A y $u^2 = 0$ en Σ_2

$\Rightarrow \nabla u = \vec{0}$ en A y $u = 0$ en Σ_2

$\Rightarrow u = cte$ en A y $u = 0$ en Σ_2 $\to$ como u es continua en Ω y cte en A (con $\overline{A} \subseteq \Omega$) entonces u es cte en $\overline{A}$ y como vale 0 en $\Sigma_2 \subseteq \overline{A}$ entonces $u = 0$ en todo $\overline{A}$ si $W_0 = 0$ ■