MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones, Primavera 2022
Profesor: Carlos Conca Rosende
Auxiliares: Javier Santidrián Salas y Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar 8 Extra C1

Miércoles 5 de Octubre de 2022

P1. Teorema de Gauss

Considere la región $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ definida por las inecuaciones: $x^2 + y^2 \leq 4, x + 2 \leq z \leq 4$.

a) Esboce la región $\mathcal{R}$ mostrando que su frontera $\partial\mathcal{R}$ está formada por tres superficies diferenciables.

b) Calcule el flujo neto del campo vectorial

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\frac{x+\cos(yz)}{4}\right)\hat{i} + \left(\frac{y+e^{x+z}}{4}\right)\hat{j} + \left(\frac{x^2+y^2+z}{4}\right)\hat{k}$$

que sale por la superficie formada por la unión de las tapas laterales e inferior de $\partial\mathcal{R}$.

P2. Teorema de Stokes

Considere el campo vectorial

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\sin(x) - \frac{y}{x^2+y^2}\right)\hat{i} + \left(\cos(y) + \frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j} + \left(1 + \frac{\sec(z)}{z}\right)\hat{k}$$

a) Encuentre el dominio Ω de modo que $\overrightarrow{F}$ pertenezca a $C^1(\Omega)$.

b) Pruebe que $\overrightarrow{F}$ es irrotacional en Ω.

c) Calcule la integral de trabajo de $\overrightarrow{F}$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1, z = 2$ recorrida en el sentido antihorario.

d) ¿Contradice esto el Teorema de Stokes? Justifique su respuesta.

P3. Teorema de Green

Sean $\mathcal{A} = \{\overrightarrow{r} \in \mathbb{R}^3 : 1 < ||\overrightarrow{r}|| < 2\}, \Sigma_1 = S(0,1)$ y $\Sigma_2 = S(0,2)$ (fronteras interior y exterior de $\mathcal{A}$, respectivamente). Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función en $C^2(\Omega)$, tal que $\overline{\mathcal{A}} \subseteq \Omega$ y:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathcal{A} \\ u = \omega_0 & \text{en } \Sigma_1 \\ \nabla u \cdot \hat{n} + u = 0 & \text{en } \Sigma_2 \end{cases} \tag{1}$$

donde $\omega_0 \geq 0$ es una constante fija y $\hat{n}$ es la normal exterior a $\mathcal{A}$.

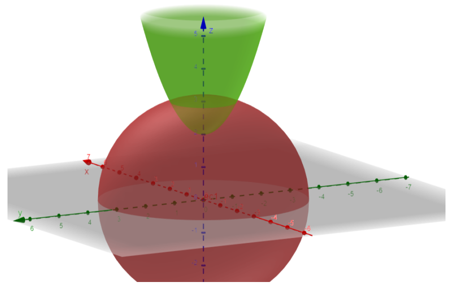
a) Utilizando las fórmulas de Green, pruebe que si $v : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función en $C^1(\Omega)$ tal que $v = 0$ sobre Σ_1, entonces:

$$\iiint_{\mathcal{A}} \nabla u \cdot \nabla v dV + \iint_{\Sigma_2} uv dA = 0 \tag{2}$$

b) Utilice (2) para probar que si $\omega_0 = 0$, entonces $\iiint_{\mathcal{A}} ||\nabla u||^2 dV + \iint_{\Sigma_2} u^2 dA = 0$. Concluya que $u = 0$ en $\overline{\mathcal{A}}$ en el caso que $\omega_0 = 0$.

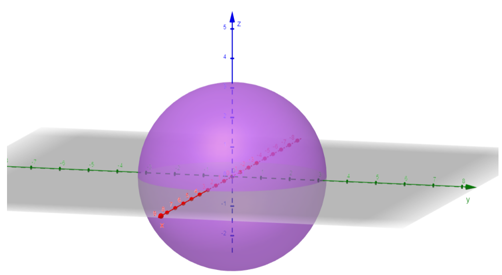
P4. Calcule el flujo del campo vectorial $\overrightarrow{F} = (x, y, z)$ que sale del sólido limitado por las superficies:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 10 \wedge z = 2 + x^2 + y^2$$

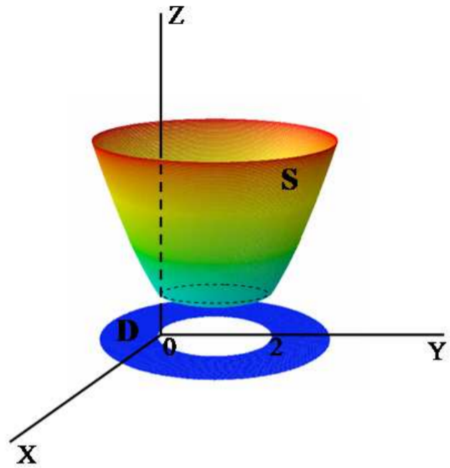


P5. Verificar el teorema de la divergencia para el campo vectorial $\overrightarrow{F} = |r|\hat{r}$ y la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$



P6. Halle el área de la porción de la superficie $z = x^2 + (y-1)^2$ comprendida entre los planos $z = 1$ y $z = 4$



P7. Se pide considerar la curva Γ parametrizada por $\sigma(t) = (e^t \cos(t), e^t \operatorname{sen}(t), e^t), t \in \mathbb{R}$.

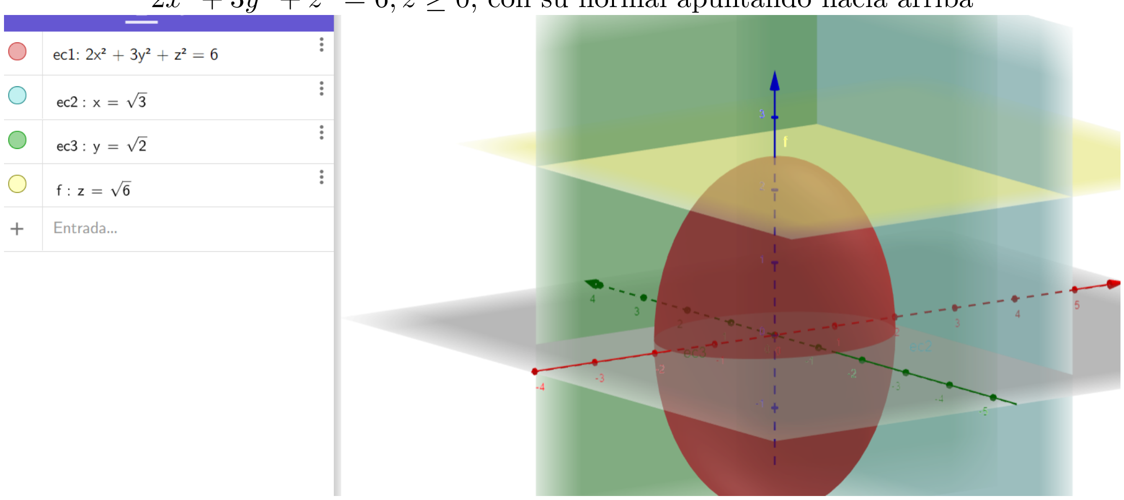
$\boxed{\textbf{P9 (a)}}$ Se pide demostrar que la curva se mueve sobre el manto del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

$\boxed{\textbf{P9 (b)}}$ Determine cuáles de los siguientes campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ son conservativos y calcule la divergencia de su gradiente en cada caso:

$$\vec{F}_1(x,y,z) = \left(\frac{y}{z^2+4}, \frac{x}{z^2+4}, -\frac{2xyz}{z^4+8z^2+16}\right),$$

$$\vec{F}_2(x,y,z) = (y^2, x, x).$$

P8. Calcular le flujo del campo $F = (0, e^{sen(xz)}, y^2)$ a través del semielipsoide superior $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6, z \geq 0$, con su normal apuntando hacia arriba



Resumen

- [**Superficie**]: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$, la llamaremos *superficie* si existe $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (parametrización) continua tal que $S = \phi(D)$ con D tal que $Int(D) \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio (abierto y conexo).
- Diremos que $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es parametrización:
  - Suave, si es clase $\mathcal{C}^1$.
  - Simple, si es inyectiva.
- [**Vectores Tangentes**]: Se definen los vectores tangentes a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$, mediante:

$$\hat{t}_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\| \qquad \hat{t}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$$

  Y se dirá que φ es regular si $\hat{t}_u, \hat{t}_v$ son linealmente independientes.
- [**Vector normal**]: Definimos el vector normal a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$ a:

$$\hat{n} = \frac{\hat{t}_u \times \hat{t}_v}{\left\| \hat{t}_u \times \hat{t}_v \right\|}$$

  Y con ello el plano tangente al plano generado por $\hat{t}_u, \hat{t}_v$ (normal a $\hat{n}$.
- [**Campo de normales**]: Dado S regular y $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización regular de S podemos calcular un campo de normales $\hat{n}$ sobre S mediante:

$$\hat{n}(u,v) = \frac{\hat{t}_u(u,v) \times \hat{t}_v(u,v)}{\left\| \hat{t}_u(u,v) \times \hat{t}_v(u,v) \right\|} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\|}$$

- [**Superficie regular orientable**]: Diremos que una superficie regular S está orientada según el campo de vectores normales $\hat{n} : s \to \mathbb{R}^3$ cuando este quede bien definido globalmente como una función continua sobre la superficie.
- [**Área**]: El Área de una superficie S viene dada por:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv$$

- [**Integral de Campo Escalar**]: Sea S una superficie orientable y $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campo escalar continuo sobre $\Omega \subseteq S$. Se define la integral de f a través de la superficies S como:

$$\iint_S f \cdot dS = \iint_D f(\varphi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv$$

  Donde φ es parametrización regular de S que respeta orientación.
- [**Integral de Flujo**]: Sea S una superficie orientable, $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ campo de normales continuos sobre S y $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial continuo sobre $\Omega \subseteq S$. Se define la integral de flujo de F a través de la superficies S orientada según $\hat{n}$ por:

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{dA} = \iint_S F \cdot \hat{n} dA = \iint_D F(\varphi(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right] dudv$$

  Donde φ es parametrización regular de S que respeta orientación.

- **[Observación]**: Si S^- está orientada en el sentido opuesto de S entonces la integral anterior cambia de signo.
- **Teorema de la Divergencia de Gauss.**
  Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\overrightarrow{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase $\boldsymbol{C^1}$** sobre un abierto $U \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \iiint\limits_{\Omega} div(\overrightarrow{F})\, dV$$

Ejercicios Propuestos

P9. Verifique el Teorema de la Divergencia, calculando por separado las integrales

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot \hat{n}\, dA$$

y

$$\int_{\Omega} \overrightarrow{F}\, dV$$

con $\overrightarrow{F} = (x, y, z)$, $\Omega = D \cap G$ donde $D = \{x^2 + y^2 \geq 1/2\}$, $G = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ y donde $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.

P10. Calcule el flujo del campo

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (e^z \operatorname{sen} y + xy^2 z, e^x \cos z + x^2 yz, x^2)$$

a través del manto del cono de ecuación $z = \rho - 1$, $-1 \leq z \leq 0$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, orientada según la normal exterior.