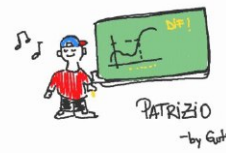


MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Carlos Conca.

Auxiliar: Patricio Yáñez A. y Javier Santidrián



Auxiliar 7: Integrales de Superficie y Cálculo Vectorial

Resumen

- **[Superficie]:** Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$, la llamaremos *superficie* si existe $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (parametrización) continua tal que $S = \phi(D)$ con D tal que $\text{Int}(D) \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio (abierto y conexo).
- Diremos que $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es parametrización:
 - Suave, si es clase $\mathcal{C}^1$.
 - Simple, si es inyectiva.

- **[Vectores Tangentes]:** Se definen los vectores tangentes a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$, mediante:

$$\hat{t}_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\| \quad \hat{t}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$$

Y se dirá que φ es regular si $\hat{t}_u, \hat{t}_v$ son linealmente independientes.

- **[Vector normal]:** Definimos el vector normal a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$ a:

$$\hat{n} = \frac{\hat{t}_u \times \hat{t}_v}{\|\hat{t}_u \times \hat{t}_v\|}$$

Y con ello el plano tangente al plano generado por $\hat{t}_u, \hat{t}_v$ (normal a $\hat{n}$).

- **[Campo de normales]:** Dado S regular y $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización regular de S podemos calcular un campo de normales $\hat{n}$ sobre S mediante:

$$\hat{n}(u, v) = \frac{\hat{t}_u(u, v) \times \hat{t}_v(u, v)}{\|\hat{t}_u(u, v) \times \hat{t}_v(u, v)\|} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

- **[Superficie regular orientable]:** Diremos que una superficie regular S está orientada según el campo de vectores normales $\hat{n} : s \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuando este quede bien definido globalmente como una función continua sobre la superficie.
- **[Área]:** El Área de una superficie S viene dada por:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

- **[Integral de Campo Escalar]:** Sea S una superficie orientable y $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar continuo sobre $\Omega \subseteq S$. Se define la integral de f a través de la superficies S como:

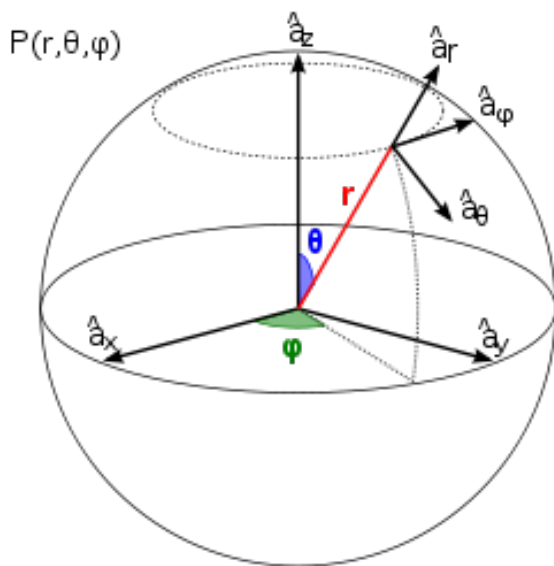
$$\iint_S f \cdot dS = \iint_D f(\varphi(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

Donde φ es parametrización regular de S que respeta orientación.

P1.- Considere la semisuperficie esférica unitaria superior, luego la siguiente parametrización

$$x(u, v) = \sin(u)\cos(v), y(u, v) = \sin(u)\sin(v), z(u, v) = \cos(u)$$

- Determine donde vive u, v y sepa que son vectores ortogonales, calcule $\|r_u \times r_v\|$ y bajo la parametrización en cartesianas, pero en dos variables con $(x, y) \in B$, círculo de unidad, calcule $\|r_x \times r_y\|$.
- Hallar la integral $f(x, y, z) = z^2$ sobre la superficie semiesférica unitaria y verifique la integral de superficie con el resultado usual.



P2.- a) Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por:

$$x = \cos \alpha \sin \beta \quad y = \sin \alpha \sin \beta \quad z = \cos \beta$$

con $\alpha \in [0, 2\pi]$ y $\beta \in [0, \pi]$.

b) Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por:

$$x = \sin \gamma \quad y = \mu \quad z = \cos \gamma$$

con $\gamma \in [0, 2\pi]$ y $\mu \in [-1, 3]$.

c) ¿Qué puede decir de la regularidad de las superficies?

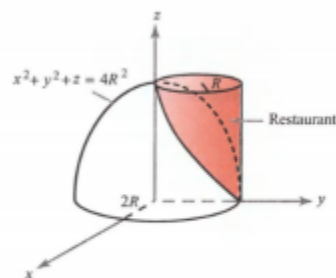
P3.- a) Encuentre el área de la superficie definida por $S = \{x^2 + y^2 \leq 2; z = xy\}$

b) Calcule el área del parche de superficie $S = \{0 < x_1 < x_2, 0 < x_2 < 1, x_3 = \cosh x_1\}$

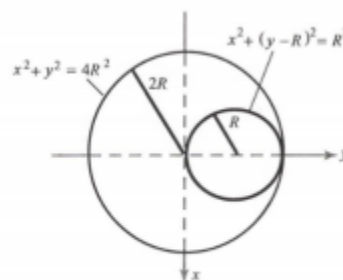
c) Sea $\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ y sea D el disco unitario en el plano (u, v) . Encuentre el área de $\phi(D)$.

d) El cilindro $x^2 + y^2 = x$ en $\mathbb{R}^3$ divide la esfera unitaria en dos secciones. S_1 lo que está dentro del cilindro y S_2 lo que está fuera de él. Encuentre el valor de $\frac{A(S_2)}{A(S_1)}$.

P4.- Están construyendo un restaurante en la ladera de la montaña. Los planos del arquitecto se muestran a continuación:



Vista lateral



Vista superior

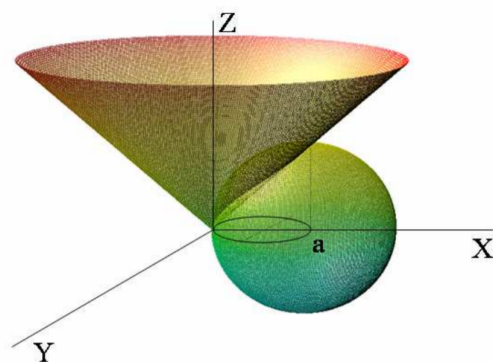
- Parametrice la superficie del restaurante. Considere R como conocido.
- La pared vertical curvada del restaurante será hecha de vidrio. ¿Cuánto vidrio se necesitará? Es decir, ¿Cuál será el área de esta pared?

P5.- Calcule el área de la porción de superficie cónica

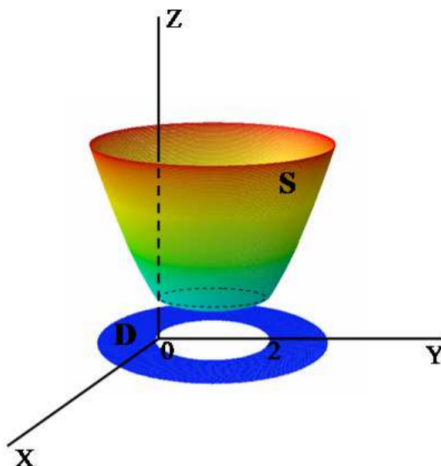
$$x^2 + y^2 = z^2$$

situada por encima del plano $z = 0$ y limitada por la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$$



P6.- Halle el área de la porción de la superficie $z = x^2 + (y - 1)^2$ comprendida entre los planos $z = 1$ y $z = 4$



Ejercicios Propuestos

P7.- Problema Fundamental de la marraqueta [1=2=4]

Había una vez el mundo de los marraquetoides, donde la reina Marraqueta, se enfrentó a todo aquel subdito quien le negaba la cantidad que era un pan frances, batido o marraqueta.

para salir del conflicto bélico que ya hapia debastado a varias familias y generaciones decidió contratar a los mejores matemáticos y matemáticas del mundo (ustedes son secos y secas po, no lo olviden, les irá bacán < 3), para que le respondieran las siguientes preguntas y dieran por cerrado el caso que acabó con Media Narnia, Pueblo Paleta, Springfield, Rancagua y Macondo.

- ¿Cuánto es una marraqueta?
- Utilizando dos cilindros, un paralelepipedo y un paraboloides, a través de uniones e intersecciones genere el conjunto de los puntos que su volumen tienen la forma geométrica de una marraqueta.
- Utilizando métodos de integración estime (puede dar sus medidas, pero debe ser consistente) la superficie crujiente de una marraqueta.

Hint: Usar integral de superficie, y parametrizar convenientemente.



P8.- Se definen las **coordenadas esferoidales prolato** (ξ, η, ϕ) mediante

$$x = a \sinh(\xi) \sin(\eta) \cos(\phi), \quad y = a \sinh(\xi) \sin(\eta) \sin(\phi), \quad z = a \cosh(\xi) \cos(\eta)$$

donde $\xi > 0$, $\eta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Verifique que este sistema de coordenadas es ortogonal, y calcule la divergencia, el laplaciano, y el rotor en estas coordenadas.

P9.- Se definen las **coordenadas toroidales** (r, φ, θ) mediante

$$x = (R + r \sin(\varphi)) \cos \theta, \quad y = (R + r \sin(\varphi)) \sin \theta, \quad z = r \cos(\varphi)$$

donde $r \in [0, R]$, $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$.

a) Verifique que este sistema de coordenadas es ortogonal, y calcule la divergencia, el laplaciano, y el rotor en estas coordenadas.

b) Piense y proponga una forma de parametrizar un toroide de la siguiente característica $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

