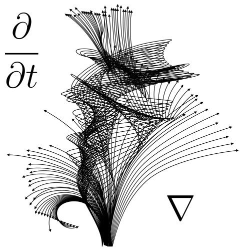
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Resumen Teórico

Cálculo Avanzado y Aplicaciones[1]
Por: *Daniel Salazar T.*



1. Cálculo Vectorial

Introducción

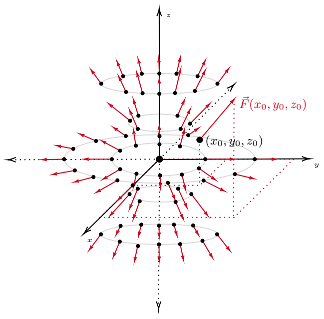
- **Campos Escalares y Vectoriales**

Denotaremos por $\vec{r}$ al **vector posición** en $\mathbb{R}^3$ y usando coordenadas cartesianas se escribe $\vec{r}=(x,y,z)=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}$, donde $\left\{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\right\}$ es el triedro correspondiente a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

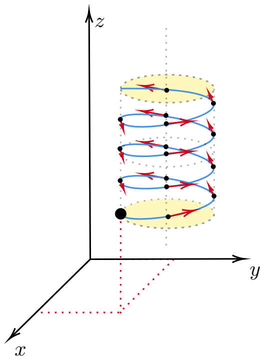
Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ un abierto no vacío. Llamaremos **campo escalar** sobre Ω a toda función a valores reales $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. Llamaremos **campo vectorial** sobre Ω a toda función $\vec{F}:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. En coordenadas cartesianas:

$$\vec{F}(x,y,z)=F_1(x,y,z)\,\hat{\imath}+F_2(x,y,z)\,\hat{\jmath}+F_3(x,y,z)\,\hat{k}$$

Donde $F_i(x,y,z)$ con $i\in\{1,2,3\}$ es un campo escalar sobre Ω. Podemos representar gráficamente al campo vectorial adhiriendo a un punto $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ el vector correspondiente a $\vec{F}(x_0,y_0,z_0)$, y repetir esto para una cantidad finita de puntos:



Sea $\vec{F}:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial, el cual supondremos suficientemente diferenciable. Una **línea de fuerza** o **línea de flujo** es una curva cuya tangente en cada punto proporciona la dirección del campo en dicho punto (curva azul en la siguiente figura):



Matemáticamente, las líneas de fuerza o flujo se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales: $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)$, donde $\vec{r}(t)$ representa al vector posición en el tiempo. Si interpretamos $\vec{F}$ como el campo de velocidades de un fluido que ocupa cierta región Ω, y dejamos una partícula suspendida en el fluido en una posición dada, la trayectoria descrita por dicha partícula es exactamente una línea de flujo.

- **Operadores Diferenciales en Cálculo Vectorial**

Sea $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)=F_1\hat{\imath}+F_2\hat{\jmath}+F_3\hat{k}$ un campo vectorial diferenciable en un punto $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$. Sabemos que el diferencial de $\vec{F}$ en dicho punto está representado por la matriz jacobiana:

$$J_{\vec{F}}\left(\vec{r}_0\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial F_3}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\end{bmatrix}$$

---

[1] Apunte teórico tipo resumen 😋. Me basé en los apuntes de Álvarez (2016) y apuntes personales.

Definiremos ciertos operadores diferenciales que hacen intervenir algunas de estas derivadas parciales en una forma bien particular. Estos operadores son fundamentales para el desarrollo de los teoremas integrales del cálculo vectorial.

Sea $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se define el operador **divergencia de** $\vec{F}$ como:

$$\boxed{\text{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}}$$

Recordando la forma del operador gradiente:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Se tiene la siguiente relación, la cuál corresponde sólo a una notación:

$$\boxed{\text{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}}$$

Notemos que dado un campo vectorial diferenciable $\vec{F}$ en un punto $\vec{r}_0 \in \Omega$ se tiene que $\text{div}\vec{F}(\vec{r}_0) = \text{tr}\left(J_{\vec{F}}\left(\vec{r}_0\right)\right)$. Se dice que un campo vectorial es **solenoidal** cuando su divergencia siempre es nula.

Un caso especial es cuando el campo vectorial corresponde al gradiente de un campo escalar. Sea f un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$, se define el **laplaciano**[2] de f como:

$$\boxed{\Delta f = \text{div}\left(\nabla f\right) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

De forma análoga se puede definir el laplaciano para un campo vectorial. Sea $\vec{F} = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$, se define el **laplaciano** de $\vec{F}$ como:

$$\boxed{\Delta\vec{F} = \Delta F_1\hat{\imath} + \Delta F_2\hat{\jmath} + \Delta F_3\hat{k}}$$

Sea $\vec{F} = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$, se define el operador **rotor**[3] de $\vec{F}$ como:

$$\boxed{\text{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}}$$

Nuevamente utilizando la forma del operador gradiente, se tiene la siguiente relación, la cuál corresponde sólo a una notación:

$$\boxed{\text{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}}$$

Se dice que un campo vectorial es **irrotacional** cuando su rotor siempre es el vector nulo.

⋆ **Observación:** Todo campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ que deriva de un potencial es irrotacional, esto es, si $\vec{F} = -\nabla g$ en Ω para algún potencial g de clase $\mathcal{C}^2$ sobre Ω, entonces $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$ en Ω. En efecto:

$$\begin{aligned} \text{rot}\left(\nabla g\right) &= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}\right)\hat{\jmath} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}\right)\hat{k} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Cada una de las componentes es nula por la igualdad de las derivadas cruzadas, lo que a su vez es cierto en virtud del teorema de Clairaut-Schwarz.

Revisemos ahora algunas identidades vectoriales las cuales se obtienen aplicando la definición, o alternativamente, la relación equivalente dada por notación, recordando algunas propiedades del producto punto y el producto cruz[4]:

⋆ **Identidades Vectoriales:** *Sean los campos vectoriales* $\vec{F}, \vec{G} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *y los campos escalares* $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *todos lo suficientemente diferenciables. Se tienen las siguientes identidades:*

1. $\text{div}\left(\lambda\vec{F} + \vec{G}\right) = \lambda\text{div}\vec{F} + \text{div}\vec{G} \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}$
2. $\text{rot}\left(\lambda\vec{F} + \vec{G}\right) = \lambda\text{rot}\vec{F} + \text{rot}\vec{G} \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}$

---

[2] Su nombre es debido a su relación con la ecuación de Laplace.

[3] También denominado **rotacional**.

[4] Recordemos las siguientes propiedades:

- **Producto Punto:**
  1. *Simetría:* $(\forall\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n)$
     $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
  2. *Bi-aditividad:* $(\forall\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{x_2}, \vec{y_2} \in \mathbb{R}^n)$
     $(\vec{x_1} + \vec{x_2}) \cdot \vec{y_1} = \vec{x_1} \cdot \vec{y_1} + \vec{x_2} \cdot \vec{y_1} \quad \wedge \quad \vec{x_1} \cdot (\vec{y_1} + \vec{y_2}) = \vec{x_1} \cdot \vec{y_1} + \vec{x_1} \cdot \vec{y_2}$
  3. *Bi-homogeneidad:* $(\forall\lambda \in \mathbb{R})\,(\forall\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n)$
     $\lambda\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \lambda\vec{y} = \lambda\left(\vec{x} \cdot \vec{y}\right)$
  4. *Positividad:* $(\forall\vec{x} \in \mathbb{R}^n)$
     $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0 \quad y \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- **Producto Cruz:**
  1. *Perpendicularidad:* $\left(\forall\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3\right)$
     $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x} \quad \wedge \quad \vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}$
  2. *Anti-conmutatividad:* $\left(\forall\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3\right)$
     $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$
  3. *Distributividad sobre +:* $\left(\forall\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3\right)$
     $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z} \quad \wedge \quad (\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}$
  4. $(\forall\lambda \in \mathbb{R})\,(\forall\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n) \quad (\lambda\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (\lambda\vec{y}) = \lambda\left(\vec{x} \times \vec{y}\right)$
  5. $(\forall\vec{x} \in \mathbb{R}^n) \quad \vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$
  6. $\left(\forall\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3\right)$
     $\left(\vec{x} \times \vec{y}\right) \times \vec{z} = \left(\vec{x} \cdot \vec{z}\right)\vec{y} - \left(\vec{y} \cdot \vec{z}\right)\vec{x}$
     $\vec{x} \times \left(\vec{y} \times \vec{z}\right) = \left(\vec{x} \cdot \vec{z}\right)\vec{y} - \left(\vec{x} \cdot \vec{y}\right)\vec{z}$

3. $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right) = 0$ *(el rotor de un campo vectorial es solenoidal.)*
4. $\operatorname{rot}\left(\nabla f\right) = \vec{0}$ *(el gradiente de un campo escalar es irrotacional.)*
5. $\operatorname{div}\left(f\vec{F}\right) = f\operatorname{div}\vec{F} + \vec{F}\cdot\nabla f$
6. $\operatorname{rot}\left(f\vec{F}\right) = f\operatorname{rot}\vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$
7. $\operatorname{div}\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{G}$
8. $\operatorname{div}\left(\nabla f \times \nabla g\right) = 0$
9. $\Delta\left(fg\right) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f\cdot\nabla g$
10. $\operatorname{div}\left(f\nabla g - g\nabla f\right) = f\Delta g - g\Delta f$
11. $\Delta\vec{F} = \nabla\left(\operatorname{div}\vec{F}\right) - \operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)$
12. $\operatorname{rot}\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{F}\operatorname{div}\vec{G} - \vec{G}\operatorname{div}\vec{F} - \left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F} - \left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G}$
13. $\nabla\left(\vec{F}\cdot\vec{F}\right) = 2\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{F} + 2\vec{F}\times\operatorname{rot}\vec{F}$
14. $\nabla\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G} + \left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F} + \vec{F}\times\operatorname{rot}\vec{G} + \vec{G}\times\operatorname{rot}\vec{F}$

⋆ **Observación:** En las tres últimas identidades se usa la notación:

$$\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G} = \vec{F}\cdot\left(\nabla G_1\right)\hat{\imath} + \vec{F}\cdot\left(\nabla G_2\right)\hat{\jmath} + \vec{F}\cdot\left(\nabla G_3\right)\hat{k}$$

Con $\vec{G} = G_1\hat{\imath} + G_2\hat{\jmath} + G_3\hat{k}$.

Sistemas de Coordenadas Ortogonales

Las coordenadas cartesianas no siempre son las más cómodas para describir objetos geométricos, campos escalares o vectoriales. De hecho, en diversas ocasiones el problema en estudio posee ciertas simetrías que no se ven reflejadas al utilizar estas coordenadas. Otros sistemas de coordenadas serán útiles.

En general, un **sistema de coordenadas curvilíneas** es una transformación invertible suficientemente diferenciable $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de modo que a todo triplete $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ le corresponde un único punto en el espacio:

$$\vec{r}\left(u,v,w\right) = \left(x\left(u,v,w\right), y\left(u,v,w\right), z\left(u,v,w\right)\right)$$

Además suponemos que la matriz jacobiana del sistema de coordenadas en no singular, esto es:

$$\begin{aligned} &J_{\vec{r}}\left(u_0,v_0,w_0\right) \\ &= \left[\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\left(u_0,v_0,w_0\right) \middle| \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\left(u_0,v_0,w_0\right) \middle| \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\left(u_0,v_0,w_0\right)\right]_{3\times3} \end{aligned}$$

Es una matriz invertible para cada $(u_0,v_0,w_0) \in D$.

Asociado al sistema de coordenadas curvilíneo, en cada punto se define un triedro de vectores unitarios de la siguiente manera: fijemos $(u_0,v_0,w_0) \in D$ y consideremos la curva parametrizada por $u \mapsto \vec{r}\left(u,v_0,w_0\right)$. Como la matriz jacobiana del sistema es invertible, en particular $\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\left(u_0,v_0,w_0\right)\right\| \neq 0$, y por lo tanto el vector tangente a la curva en el punto $\vec{r}\left(u_0,v_0,w_0\right)$ está bien definido y se expresa como:

$$\hat{u} = \frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\left(u_0,v_0,w_0\right)}{\left\|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\left(u_0,v_0,w_0\right)\right\|}$$

Evidentemente, $\hat{u}$ puede depender de (u_0,v_0,w_0) pero no explicitaremos esta dependencia para simplificar la notación. Similarmente, como $\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\left(u_0,v_0,w_0\right)\right\| \neq 0$ y $\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\left(u_0,v_0,w_0\right)\right\| \neq 0$, los vectores tangentes $\hat{v}$ y $\hat{w}$ a las curvas parametrizadas por $v \mapsto \vec{r}\left(u_0,v,w_0\right)$ y $w \mapsto \vec{r}\left(u_0,v_0,w\right)$ están bien definidos. Más aún, nuevamente en virtud de la invertibilidad de la matriz jacobiana en todo punto, se tiene que el triedro $\{\hat{u},\hat{v},\hat{w}\}$ es linealmente independiente por lo que constituye una base normalizada de $\mathbb{R}^3$.

Se dice que el sistema de coordenadas $\vec{r} = \vec{r}(u,v,w)$, con $(u,v,w) \in D$, es **ortogonal**, si los vectores unitarios del triedro $\{\hat{u},\hat{v},\hat{w}\}$ definidos por:

$$\boxed{\hat{u} = \frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\left(u_0,v_0,w_0\right)}{\left\|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\left(u_0,v_0,w_0\right)\right\|},\ \hat{v} = \frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}\left(u_0,v_0,w_0\right)}{\left\|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}\left(u_0,v_0,w_0\right)\right\|},\ \hat{w} = \frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial w}\left(u_0,v_0,w_0\right)}{\left\|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial w}\left(u_0,v_0,w_0\right)\right\|}}$$

Son mutuamente ortogonales para cada $(u,v,w) \in D$.

Llamaremos **factores escalares** a los siguientes valores reales:

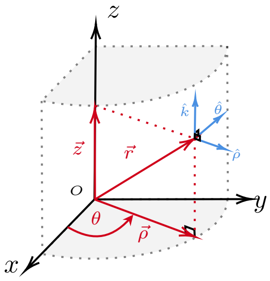
$$\boxed{h_u = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right\|, \quad h_v = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right\|, \quad h_w = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right\|}$$

De esta forma por definición se tiene que:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = h_u\hat{u}, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = h_v\hat{v}, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial w} = h_w\hat{w}$$

⋆ **Aplicación en Coordenadas Cilíndricas:**

Recordemos coordenadas cilíndricas:



$\rho \in [0,+\infty)$
$\theta \in [0,2\pi)$
$z \in \mathbb{R}$

La relación entre las coordenadas cilíndricas y cartesianas viene dada por:

$$\begin{aligned} \vec{r}\left(\rho,\theta,z\right) &= \left(x\left(\rho,\theta,z\right), y\left(\rho,\theta,z\right), z\left(\rho,\theta,z\right)\right) \\ &= \left(\rho\cos\left(\theta\right), \rho\sin\left(\theta\right), z\right) \end{aligned}$$

Recíprocamente, a un punto descrito por lo valores x, y y z, en coordenadas cartesianas, le corresponden los siguientes valores en coordenadas cilíndricas:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z$$

Calculemos los factores escalares y el triedro unitario asociado a este sistema de coordenadas:

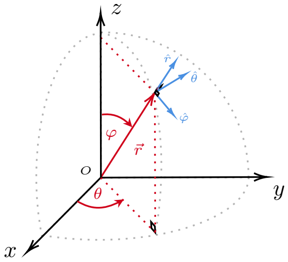
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}=\left(\cos\left(\theta\right),\sin\left(\theta\right),0\right)\quad\Rightarrow\quad\boxed{h_\rho=1}$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=\left(-\rho\sin\left(\theta\right),\rho\cos\left(\theta\right),0\right)\quad\Rightarrow\quad\boxed{h_\theta=\rho}$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}=\left(0,0,1\right)\quad\Rightarrow\quad\boxed{h_z=1}$$

Obteniendo finalmente que el triedro es:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}&=\left(\cos\left(\theta\right),\sin\left(\theta\right),0\right)\\ \hat{\theta}&=\left(-\sin\left(\theta\right),\cos\left(\theta\right),0\right)\\ \hat{z}&=\hat{k}=\left(0,0,1\right)\end{aligned}$$

⋆ Aplicación en Coordenadas Esféricas:

Recordemos coordenadas esféricas:



$r\in[0,+\infty)$
$\theta\in[0,2\pi)$
$\varphi\in[0,\pi]$

La relación entre las coordenadas esféricas y cartesianas viene dada por:

$$\begin{aligned}\vec{r}\left(r,\theta,\varphi\right)&=\left(x\left(r,\theta,\varphi\right),y\left(r,\theta,\varphi\right),z\left(r,\theta,\varphi\right)\right)\\&=\left(r\cos\left(\theta\right)\sin\left(\varphi\right),r\sin\left(\theta\right)\sin\left(\varphi\right),r\cos\left(\varphi\right)\right)\end{aligned}$$

Recíprocamente, a un punto descrito por lo valores x, y y z, en coordenadas cartesianas, le corresponden los siguientes valores en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}r&=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \theta&=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\\ \varphi&=\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)\end{aligned}$$

Calculemos los factores escalares y el triedro unitario asociado a este sistema de coordenadas:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}=\left(\cos\left(\theta\right)\sin\left(\varphi\right),\sin\left(\theta\right)\sin\left(\varphi\right),\cos\left(\varphi\right)\right)$$
$$\Rightarrow\quad\boxed{h_r=1}$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=\left(-r\sin\left(\theta\right)\sin\left(\varphi\right),r\cos\left(\theta\right)\sin\left(\varphi\right),0\right)$$
$$\Rightarrow\quad\boxed{h_\theta=r\sin\left(\varphi\right)}$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=\left(r\cos\left(\theta\right)\cos\left(\varphi\right),r\sin\left(\theta\right)\cos\left(\varphi\right),-r\sin\left(\varphi\right)\right)$$
$$\Rightarrow\quad\boxed{h_\varphi=r}$$

Obteniendo finalmente que el triedro es:

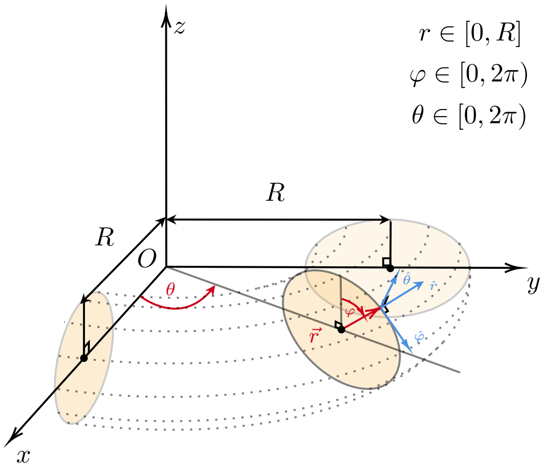
$$\begin{aligned}\hat{r}&=\left(\cos\left(\theta\right)\sin\left(\varphi\right),\sin\left(\theta\right)\sin\left(\varphi\right),\cos\left(\varphi\right)\right)\\ \hat{\theta}&=\left(-\sin\left(\theta\right),\cos\left(\theta\right),0\right)\\ \hat{\varphi}&=\left(\cos\left(\theta\right)\cos\left(\varphi\right),\sin\left(\theta\right)\cos\left(\varphi\right),-\sin\left(\varphi\right)\right)\end{aligned}$$

- **Observación:** Notemos que para seguir la convención conocida como la *regla de la mano derecha*[5] para el producto cruz entre dos miembros sucesivos del triedro, es conveniente ordenar las variables como r, φ y θ, quedando asimismo el propio triedro ordenado de la forma $\hat{r}$, $\hat{\varphi}$ y $\hat{\theta}$. Por esta razón hay que tener precaución de siempre verificar primero cuál es el nombre de cada ángulo antes de seguir un desarrollo que involucre coordenadas esféricas.

⋆ Aplicación en Coordenadas Toroidales:

Este sistema no corresponde exactamente a la noción de sistema de coordenadas definida anteriormente, pues no permiten describir el espacio $\mathbb{R}^3$ completo. Sin embargo, el análisis anterior sigue siendo válido. En estas coordenadas, dado un radio mayor R fijo, la posición de un punto $\vec{r}$ queda determinada por un radio menor r y dos ángulos θ y φ como muestra la figura:

$r\in[0,R]$
$\varphi\in[0,2\pi)$
$\theta\in[0,2\pi)$



El vector posición viene dado por:

---

[5] En coordenadas cartesianas:

$$\boxed{\hat{i}\times\hat{j}\times\overset{\rightarrow}{\underset{-}{\hat{k}}}\times\overset{+}{\underset{\leftarrow}{\hat{i}}}\times\hat{j}\times\hat{k}}$$

$$\begin{aligned}&\vec{r}\left(r,\varphi,\theta\right)\\&=\left(\left(R+r\sin\left(\varphi\right)\right)\cos\left(\theta\right),\left(R+r\sin\left(\varphi\right)\right)\sin\left(\theta\right),r\cos\left(\varphi\right)\right)\end{aligned}$$

Entonces, los vectores unitarios y los factores escalares resultan ser:

$$\boxed{h_r=1}\quad\boxed{h_\varphi=r}\quad\boxed{h_\theta=\left(R+r\sin\left(\varphi\right)\right)}$$

$$\begin{aligned}\hat{r}&=\left(\sin\left(\varphi\right)\cos\left(\theta\right),\sin\left(\varphi\right)\sin\left(\theta\right),\cos\left(\varphi\right)\right)\\\hat{\varphi}&=\left(\cos\left(\varphi\right)\cos\left(\theta\right),\cos\left(\varphi\right)\sin\left(\theta\right),-\sin\left(\varphi\right)\right)\\\hat{\theta}&=\left(-\sin\left(\theta\right),\cos\left(\theta\right),0\right)\end{aligned}$$

En las aplicaciones, muchas magnitudes escalares se expresan de manera natural como una función descrita en un sistema de coordenadas curvilíneas distinto al cartesiano, esto con el fin de simplificar la notación. Resulta entonces interesante obtener expresiones para los operadores diferenciales fundamentales de campos escalares o vectoriales en términos de un sistema de coordenadas ortogonales $\vec{r}=\vec{r}\left(u,v,w\right)$, con $\left(u,v,w\right)\in D$. Veremos el caso específico del gradiente de una función diferenciable $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.

Sea $\left(u,v,w\right)\in D$ tal que $\vec{r}\left(u,v,w\right)\in\Omega$. Para simplificar la notación, no escribiremos explícitamente la dependencia en u, v y w. Como el triedro $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$ es ortonormal y en particular es una base de $\mathbb{R}^3$, podemos proyectar en ella:

$$\nabla f\left(\vec{r}\right)=\underbrace{\left(\nabla f\left(\vec{r}\right)\cdot\hat{u}\right)}_{\frac{1}{h_u}\nabla f\left(\vec{r}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}}\hat{u}+\underbrace{\left(\nabla f\left(\vec{r}\right)\cdot\hat{v}\right)}_{\frac{1}{h_v}\nabla f\left(\vec{r}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}}\hat{v}+\underbrace{\left(\nabla f\left(\vec{r}\right)\cdot\hat{w}\right)}_{\frac{1}{h_w}\nabla f\left(\vec{r}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}}\hat{w}$$

Pero por regla de la cadena:

$$\nabla f\left(\vec{r}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left(f\circ\vec{r}\right)$$

Por lo que, obtenemos el **gradiente en coordenadas ortogonales**:

$$\boxed{\nabla f=\frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u}+\frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v}+\frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}}$$

Notemos que en el caso de las coordenadas cartesianas, lo anterior corresponde a la expresión habitual para el gradiente:

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

- ⋆ **Coordenadas Cilíndricas:** Si $f=f\left(\rho,\theta,z\right)$ entonces:

$$\boxed{\nabla f=\frac{\partial f}{\partial\rho}\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}}$$

- ⋆ **Coordenadas Esféricas:** Si $f=f\left(r,\theta,\varphi\right)$ entonces:

$$\boxed{\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r\sin\left(\varphi\right)}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\varphi}}$$

De manera análoga a lo realizado para el gradiente de un campo escalar, es posible obtener expresiones para la divergencia y el rotor de un campo vectorial en coordenadas ortogonales.

Sea ahora un campo vectorial $\vec{F}:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^1$ en el abierto Ω con $\vec{r}\left(u,v,w\right)\in\Omega$ para $\left(u,v,w\right)\in D$. Definamos:

$$\begin{aligned}F_u&=F_u\left(u,v,w\right)=\vec{F}\left(\vec{r}\left(u,v,w\right)\right)\cdot\hat{u}\left(u,v,w\right)\\F_v&=F_v\left(u,v,w\right)=\vec{F}\left(\vec{r}\left(u,v,w\right)\right)\cdot\hat{v}\left(u,v,w\right)\\F_w&=F_w\left(u,v,w\right)=\vec{F}\left(\vec{r}\left(u,v,w\right)\right)\cdot\hat{w}\left(u,v,w\right)\end{aligned}$$

Eliminando la dependencia explícita en u, v y w, podemos entonces escribir:

$$\vec{F}=F_u\hat{u}+F_v\hat{v}+F_w\hat{w}$$

Por lo que, obtenemos la **divergencia en coordenadas ortogonales**:

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{F}=\frac{1}{h_uh_vh_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(F_uh_vh_w\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(h_uF_vh_w\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(h_uh_vF_w\right)\right)}$$

- ⋆ **Aplicación en Coordenadas Cilíndricas:** Si $\vec{F}=F_\rho\hat{\rho}+F_\theta\hat{\theta}+F_z\hat{z}$, como $h_\rho=1$, $h_\theta=\rho$, $h_z=1$ se tiene:

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{F}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F_\rho\rho\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_\theta\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(F_z\rho\right)\right)}$$

- ⋆ **Aplicación en Coordenadas Esféricas:** Si $\vec{F}=F_r\hat{r}+F_\theta\hat{\theta}+F_\varphi\hat{\varphi}$, como $h_r=1$, $h_\theta=r\sin\left(\varphi\right)$, $h_\varphi=r$ se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{div}\vec{F}=\frac{1}{r^2\sin\left(\varphi\right)}\\&\quad\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(F_rr^2\sin\left(\varphi\right)\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_\theta r\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F_\varphi r\sin\left(\varphi\right)\right)\right)\end{aligned}}$$

Rotor en coordenadas ortogonales:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{rot}\vec{F}=&\frac{1}{h_vh_w}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(F_wh_w\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left(F_vh_v\right)\right)\hat{u}\\&+\frac{1}{h_uh_w}\left(\frac{\partial}{\partial w}\left(F_uh_u\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(F_wh_w\right)\right)\hat{v}\\&+\frac{1}{h_uh_v}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(F_vh_v\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(F_uh_u\right)\right)\hat{w}\end{aligned}}$$

- ⋆ **Observación:** Aquí se asume que el triedro $\hat{u}$, $\hat{v}$ y $\hat{w}$ (en ese orden) está orientado de modo que se satisface la regla de la mano derecha, es decir: $\hat{u}\times\hat{v}=\hat{w}$, $\hat{v}\times\hat{w}=\hat{u}$, $\hat{w}\times\hat{u}=\hat{v}$, por lo que podemos utilizar:

$$\boxed{\hat{u} \times \hat{v} \times \underset{-}{\overset{\rightarrow}{\hat{w}}} \times \underset{\leftarrow}{\overset{+}{\hat{u}}} \times \hat{v} \times \hat{w}}$$

Así podemos escribir por notación:

$$\boxed{\text{rot}\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}}$$

Que corresponde formalmente a $\text{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ con $\nabla = \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\hat{w}$.

- ⋆ **Observación:** La notación para el rotor como un determinante es muy útil como regla mnemotécnica. Sin embargo, ésta debe ser aplicada directamente, evitando usar las propiedades del determinante para factorizar filas o columnas. La razón es que en general esas propiedades no son ciertas cuando intervienen operadores diferenciales, en este caso las derivadas parciales,junto con productos de funciones que dependen de las variables con respecto a las cuales se está derivando, en cuyo caso el orden de los factores **SÍ** puede alterar el producto.
- ⋆ **Aplicación en Coordenadas Cilíndricas:** Si $\vec{F} = F_\rho\hat{\rho} + F_\theta\hat{\theta} + F_z\hat{z}$ y siguiendo la regla de la mano derecha:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{rot}\vec{F} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\theta & F_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \rho\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\hat{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho F_\theta\right) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta}\right)\hat{z} \end{aligned}}$$

- ⋆ **Aplicación en Coordenadas Esféricas:** Si $\vec{F} = F_r\hat{r} + F_\varphi\hat{\varphi} + F_\theta\hat{\theta}$ y siguiendo la regla de la mano derecha:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{rot}\vec{F} &= \frac{1}{r^2\sin(\varphi)} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\varphi} & r\sin(\varphi)\,\hat{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_r & rF_\varphi & r\sin(\varphi)\,F_\theta \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2\sin(\varphi)}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(F_\theta r\sin(\varphi)\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(F_\varphi r\right)\right)\hat{r} \\ &\quad + \frac{1}{r\sin(\varphi)}\left(\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}\left(F_\theta r\sin(\varphi)\right)\right)\hat{\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(F_\varphi r\right) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right)\hat{\theta} \end{aligned}}$$

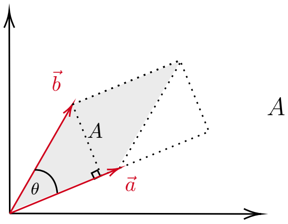
Integral de Flujo y el Teorema de Gauss

- **Superficies en $\mathbb{R}^3$**

Similarmente a como se define una curva en $\mathbb{R}^n$, definimos una superficie.

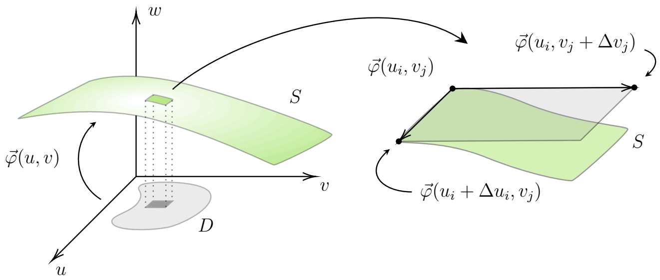
Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se llama **superficie** si existe una función continua $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ llamada **parametrización de la superficie** tal que $S = \{\vec{\varphi}(u,v) \,|\, (u,v) \in D\}$, donde, para evitar situaciones patológicas, suponemos que $D = \text{int}(D)$, con $\text{int}(D) \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio no vacío, esto es, un conjunto abierto y conexo[6]. Llamaremos **suave** a una superficie que admite una parametrización de clase $\mathcal{C}^1$. Una superficie se dirá **suave por pedazos** si admite una parametrización de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos. Diremos también que una superficie es **simple** si admite una parametrización inyectiva.

Veamos cómo calcular el área de una superficie en $\mathbb{R}^3$. Recordemos de álgebra lineal que el área de un paralelógramo definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está dada por:



$$A = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|\,|\sin(\theta)|$$

Sea, entonces, S una superficie simple y regular, y $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de ésta. Luego, para aproximar el área de una superficie procedemos a subdividir en pequeñas celdas:



De esta manera, podemos estimar el área $(\Delta A)_{ij}$ de la región sombreada como sigue:

$$\begin{aligned} &(\Delta A)_{ij} \\ &= \|(\vec{\varphi}(u_i+\Delta u_i,v_j) - \vec{\varphi}(u_i,v_j)) \times (\vec{\varphi}(u_i,v_j+\Delta v_j) - \vec{\varphi}(u_i,v_j))\| \\ &= \left\| \frac{\vec{\varphi}(u_i+\Delta u_i,v_j)-\vec{\varphi}(u_i,v_j)}{\Delta u_i} \times \frac{\vec{\varphi}(u_i,v_j+\Delta v_j)-\vec{\varphi}(u_i,v_j)}{\Delta v_j} \right\| \Delta u_i \Delta v_j \end{aligned}$$

Lo cual converge a:

$$(dA)_{ij} = \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i}(u_i,v_j) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v_j}(u_i,v_j) \right\| du_i dv_j$$

Sumando se tiene:

---

[6] Un conjunto se dice **conexo** si no puede ser descrito como unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos.

$$\begin{aligned} A(S) &= \sum_{i,j} (dA)_{ij} \\ &= \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v_j}(u_i, v_j) \right\| du_i dv_j \end{aligned}$$

Lo que converge al **área de la superficie** S:

$$\boxed{A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u, v) \right\| dudv}$$

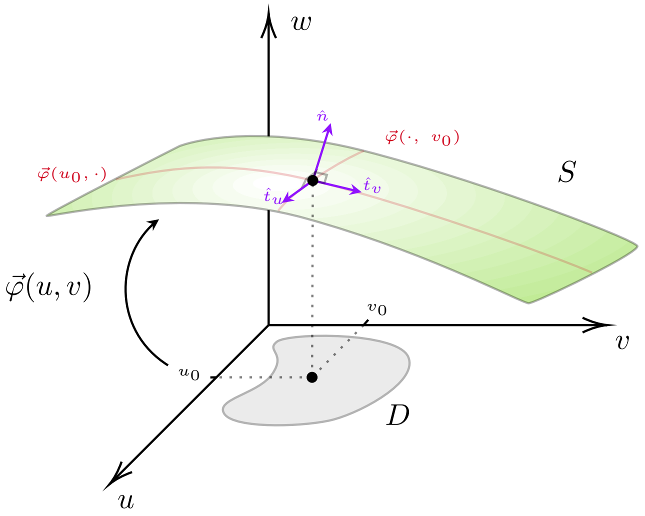
Donde el **diferencial de área** corresponde a:

$$\boxed{dA = \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| dudv}$$

- **Campos de Normales**

  Consideremos una superficie suave y simple $S \subseteq \mathbb{R}^3$ con parametrización $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suave y simple. Para un punto $(u_0, v_0) \in \text{int}(D)$, en vecindades de u_0 y v_0, respectivamente, las funciones $u \mapsto \vec{\varphi}(\cdot, v_0)$ y $v \mapsto \vec{\varphi}(u_0, \cdot)$ definen curvas sobre S. Supongamos que en el punto (u_0, v_0) $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \neq 0$ y $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \neq 0$. Definimos los **vectores tangentes** a S en el punto $\vec{\varphi}(u_0, v_0)$ mediante:

$$\boxed{\hat{t}_u = \frac{\dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}}{\left\| \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \right\|} \qquad \hat{t}_v = \frac{\dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|}}$$



Diremos que la parametrización $\vec{\varphi}$ asociada a la superficie S es **regular** si los vectores tangentes $\hat{t}_u$ y $\hat{t}_v$ son linealmente independientes. En tal caso, llamaremos **plano tangente** al plano generado por $\hat{t}_u$ y $\hat{t}_v$, y definiremos al **vector normal** a S en $\vec{\varphi}(u_0, v_0)$ como:

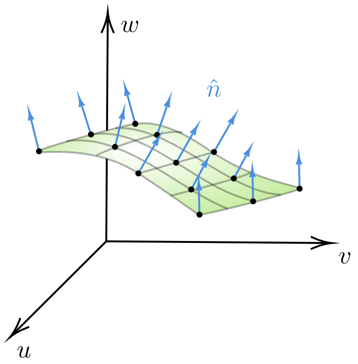
$$\boxed{\hat{n} = \frac{\hat{t}_u \times \hat{t}_v}{\left\| \hat{t}_u \times \hat{t}_v \right\|}}$$

Los vectores $\hat{t}_u$ y $\hat{t}_v$ pueden no ser ortogonales, razón por la cual en general es necesario normalizar. Diremos que una superficie es **regular** si admite una parametrización $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que es regular en todo punto $(u, v) \in \text{int}(D)$, y que es **regular por pedazos** si se descompone en una unión finita de superficies regulares.

Si S es regular y $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S podemos calcular un **campo de normales** $\hat{n}$ sobre S mediante:

$$\boxed{\hat{n}(u, v) = \frac{\hat{t}_u(u, v) \times \hat{t}_v(u, v)}{\left\| \hat{t}_u(u, v) \times \hat{t}_v(u, v) \right\|} = \frac{\dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(u, v) \times \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u, v)}{\left\| \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(u, v) \times \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u, v) \right\|}}$$

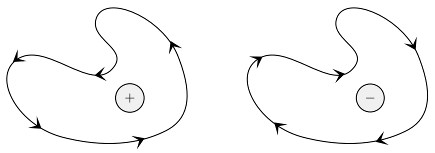
Donde identificamos $\hat{n}(u, v)$ con la normal $\hat{n}(\vec{\varphi}(u, v))$ a la superficie S en el punto $\vec{\varphi}(u, v)$.



  ⋆ **Observación:** Dada una superficie regular, los vectores tangentes dependen de la parametrización regular específica que se escoja para hacer los cálculos. Sin embargo, se puede demostrar que el vector normal es único salvo por el signo (para obtener el campo de normales de signo opuesto basta con intercambiar los roles de las variables u y v.). En consecuencia, el plano tangente es único.

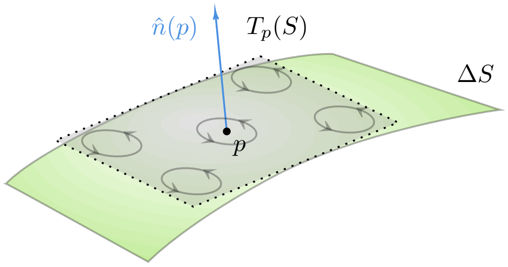
- **Superficies Orientables**

  Escoger una **orientación** para un plano significa definir una noción de **movimiento positivo** a lo largo de las curvas cerradas, regulares y simples contenidas en dicho plano. De hecho, dado un plano de vector normal constante dado, este último define una orientación que obedece a la convención popularmente conocida como la ***regla de la mano derecha****: se extiende la mano derecha de modo que el pulgar quede perpendicular a los restantes dedos, entonces, si el pulgar indica el sentido del vector normal al plano, al cerrar los otros dedos sobre la palma de la mano se obtiene la orientación positiva.* Por ejemplo, si consideramos el plano XY de vector normal constante e idénticamente igual a $\hat{k}$, entonces la regla de la mano derecha impone el escoger la orientación positiva como aquella obtenida al recorrer la curva en sentido antihorario:



Más generalmente, escoger una orientación sobre una superficie S en una vecindad de un punto $p \in S$ corresponde a una noción de movimiento positivo para curvas cerradas (regulares y simples) suficientemente pequeñas de modo que pertenezcan a la vecindad. Si es posible repetir lo anterior para todo punto $p \in S$ de modo que las orientaciones coincidan en la intersección de cualquier par de vecindades, entonces se dice que la **superficie es orientable**. Esto último es una propiedad de carácter global para la superficie. Intuitivamente, en una superficie orientable es posible distinguir dos caras: aquélla vista desde la orientación positiva y la cara opuesta.

Si la superficie S es regular, es natural inducir una orientación local sobre S en torno a un punto $p \in S$ a partir de la orientación sobre el plano $T_p(S)$ tangente a S en p, la orientación de esta última está dada por el vector normal $\hat{n}(p)$ de acuerdo a la regla de la mano derecha. Así, localmente el vector normal permite distinguir entre las dos caras de un elemento de superficie.



Sin embargo, la regularidad de la superficie no es suficiente para que sea automáticamente orientable en el sentido global.

Diremos que una superficie regular S está **orientada según el campo de vectores normales** $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ cuando éste quede bien definido globalmente como una función continua sobre toda la superficie.

Cuando S sea una superficie cerrada y orientable, diremos que S está orientada según la **normal exterior** si la normal apunta, para todo punto de la superficie, en dirección contraria al volumen encerrado por la superficie, y diremos que está orientada según la **normal interior** en caso contrario.

- **Integral de Superficie**

  Sea S una superficie simple y regular, y $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de ésta. Si $\rho : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función escalar continua definida en un abierto Ω que contiene a S, definimos la **integral de superficie de ρ sobre S** mediante:

$$\boxed{\iint_S \rho dA = \iint_D \rho\left(\vec{\varphi}\left(u,v\right)\right) \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}\left(u,v\right) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}\left(u,v\right) \right\| dudv}$$

HACER DIBUJITO

Notemos que los conceptos antes definidos no dependen de la parametrización regular elegida, es decir, si $\vec{\varphi}_1 = \vec{\varphi} \circ \vec{\theta}$ es una reparametrización de la superficie S, donde $\vec{\theta} : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to D$ es un difeomorfismo ($\vec{\theta}$ y $\vec{\theta}^{-1}$ son de clase $\mathcal{C}^1$), entonces:

$$\iint_{D_1} \rho\left(\vec{\varphi}_1\left(s,t\right)\right) \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}_1}{\partial s}\left(s,t\right) \times \frac{\partial \vec{\varphi}_1}{\partial t}\left(s,t\right) \right\| dsdt = \iint_D \rho\left(\vec{\varphi}\left(u,v\right)\right) \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}\left(u,v\right) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}\left(u,v\right) \right\| dudv$$

Con lo cual la integral $\iint_D \rho dA$ no cambia bajo reparametrización. En efecto, sabemos de la regla de la cadena que las siguientes igualdades son satisfechas:

$$\frac{\partial \vec{\varphi}_1}{\partial s} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}\frac{\partial \theta_u}{\partial s} + \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}\frac{\partial \theta_v}{\partial s}, \qquad \frac{\partial \vec{\varphi}_1}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}\frac{\partial \theta_u}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}\frac{\partial \theta_v}{\partial t}$$

Con lo que se tiene:

$$\frac{\partial \vec{\varphi}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{\varphi}_1}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \left(\frac{\partial \theta_u}{\partial s}\frac{\partial \theta_v}{\partial t} - \frac{\partial \theta_v}{\partial s}\frac{\partial \theta_u}{\partial t} \right)$$

Finalmente, aplicando el teorema de cambio de variables se deduce:

$$\begin{aligned} &\iint_{D_1} \rho\left(\vec{\varphi}_1\left(s,t\right)\right) \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{\varphi}_1}{\partial t} \right\| dsdt \\ &= \iint_{D_1} \rho(\vec{\varphi}(\vec{\theta}(s,t))) \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| \underbrace{\left| \left(\frac{\partial \theta_u}{\partial s}\frac{\partial \theta_v}{\partial t} - \frac{\partial \theta_v}{\partial s}\frac{\partial \theta_u}{\partial t} \right) \right|}_{\left|\det\left(J_{\vec{\theta}}\right)\right|} dsdt \\ &= \iint_D \rho\left(\vec{\varphi}\left(u,v\right)\right) \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| dudv \end{aligned}$$

- ⋆ **Observación:** Es importante que la parametrización $\vec{\varphi}(\cdot)$ usada para calcular $\iint_S \rho dA$ sea simple y regular con el fin de evitar el sumar dos veces la misma región. El análogo en curvas es que la parametrización no debe devolverse y pasar dos veces por el mismo segmento de la curva.

- ⋆ **Aplicación:**

  Notemos que si ρ representa densidad superficial de masa o carga eléctrica, la integral $\iint_S \rho dA$ representa la masa total o la carga eléctrica total contenida en la superficie S, respectivamente.

  La noción de centro de masa se extiende entonces naturalmente al caso de superficies de la siguiente manera:

$$x_G = \frac{\displaystyle\iint_D x\rho\left(\vec{\varphi}\left(u,v\right)\right) \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| dudv}{\displaystyle\iint_D \rho\left(\vec{\varphi}\left(u,v\right)\right) \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| dudv}$$

$$y_G = \frac{\displaystyle\iint_D y\rho\left(\vec{\varphi}\left(u,v\right)\right) \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| dudv}{\displaystyle\iint_D \rho\left(\vec{\varphi}\left(u,v\right)\right) \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| dudv}$$

$$z_G = \frac{\displaystyle\iint_D z\rho\left(\vec{\varphi}\left(u,v\right)\right)\left\|\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right\|dudv}{\displaystyle\iint_D \rho\left(\vec{\varphi}\left(u,v\right)\right)\left\|\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right\|dudv}$$

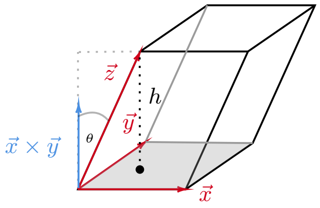
En otras palabras, intuitivamente se tiene que el diferencial de masa está dado por $dm = \rho dA$. Podemos resumir lo anterior con la siguiente notación vectorial:

$$\vec{r}_G = \frac{\displaystyle\iint_S \vec{r}\rho dA}{\displaystyle\iint_S dm} = \frac{1}{M}\iint_S \vec{r}\rho dA \qquad \vec{r} = (x,y,z)$$

⋆ **Observación:** Las definiciones establecidas en esta sección pueden extenderse trivialmente al caso de una superficie S regular por trozos.

- **Diferencial de Volumen**

Recordemos cómo calcular el volumen de un paralelepípedo definido por tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$:



$$V = \|\vec{x}\times\vec{y}\|\|\vec{z}\||\cos(\theta)|$$

Entonces, recordando las propiedades del producto punto:

$$\begin{aligned} V &= \|\vec{x}\times\vec{y}\|\,\|\vec{z}\|\,|\cos\left(\theta\right)| \\ &= |(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}| \\ &= \left|\det\left(\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\right)\right| \end{aligned}$$

Se podría construir de manera análoga al diferencial de área, pero notemos lo siguiente:

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región más complicada, sabemos que:

$$V\left(\Omega\right) = \int_\Omega dV = \iiint_\Omega dxdydz$$

Siempre que la integral exista. Decimos entonces que el elemento de volumen en cartesianas viene dado por:

$$dV = dxdydz$$

Supongamos ahora que hemos descrito el conjunto Ω mediante un sistema de coordenadas $(u,v,w)\to\vec{r}\left(u,v,w\right)$, con lo que $D = \vec{r}^{-1}\left(\Omega\right)$. Utilizando el teorema del cambio de variables para la integral de una función integrable $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ aplicado a nuestro caso:

$$\begin{aligned} &\iiint_\Omega f\left(x,y,z\right)dxdydz \\ &= \iiint_D f\left(\vec{r}\left(u,v,w\right)\right)\left|\det\left(J_{\vec{r}}\right)\right|dudvdw \\ &= \iiint_D f\left(\vec{r}\left(u,v,w\right)\right)\left|\det\left(\left[\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\;\middle|\;\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\;\middle|\;\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right]\right)\right|dudvdw \end{aligned}$$

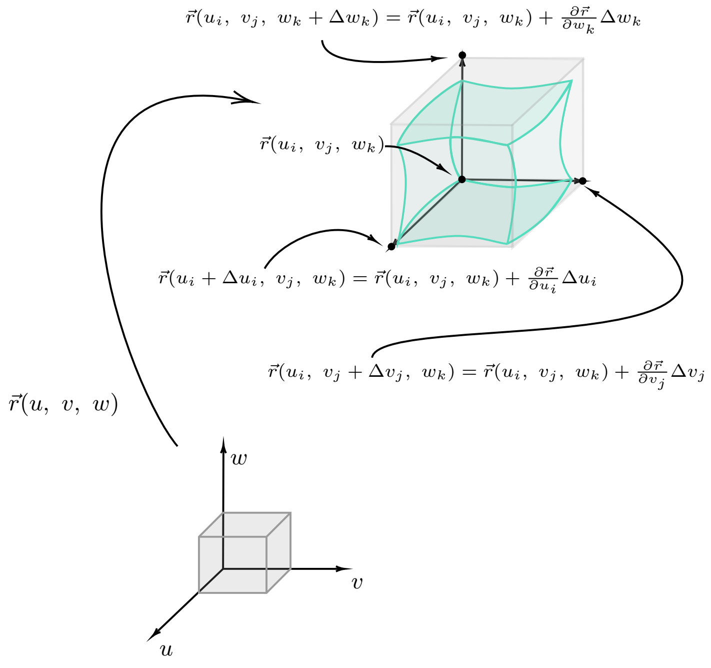
Aplicando lo anterior a la función constante $f = 1$ (definición de volumen) obtenemos que el **volumen de una región del espacio** Ω es:

$$\boxed{\begin{aligned} V\left(\Omega\right) &= \iiint_D \left|\det\left(\left[\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\;\middle|\;\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\;\middle|\;\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right]\right)\right|dudvdw \\ &= \iiint_D \left|\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right|dudvdw \end{aligned}}$$

Concluyendo que en este caso el **diferencial de volumen** es:

$$\boxed{dV = \left|\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|dudvdw}$$

El cual se interpreta como el volumen infinitesimal que corresponde al paralelepípedo definido por lo lados $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}du$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dv$ y $\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}dw$.



Cuando $\vec{r}\left(u,v,w\right)$ define un sistema ortogonal, entonces:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = h_u\hat{u}, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = h_v\hat{v}, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial w} = h_w\hat{w}$$

Donde $\hat{u}$, $\hat{v}$ y $\hat{w}$ son mutuamente ortogonales y unitarios. Es directo entonces ver que:

$$\left|\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right| = h_uh_vh_w$$

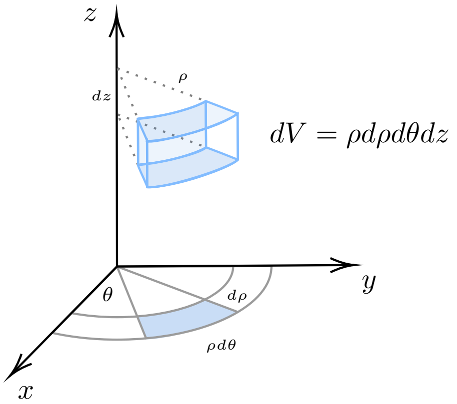
Por lo tanto, se concluye que en este caso se tiene:

$$\boxed{dV = h_u h_v h_w dudvdw}$$

En otras palabras, para calcular el volumen de Ω se suma sobre todo $(u, v, w) \in D$ el volumen del correspondiente paralelepípedo rectangular.

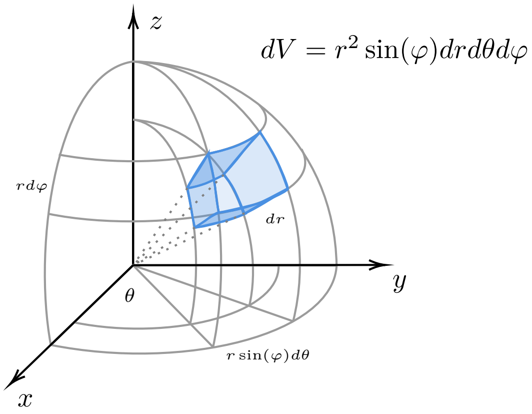
- ⋆ **Aplicación en Coordenadas Cilíndricas:** (ρ, θ, z). Tenemos que $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_z = 1$, por lo tanto:

$$\boxed{dV = \rho d\rho d\theta dz}$$



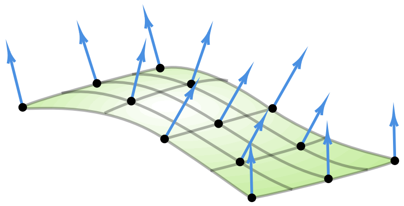
- ⋆ **Aplicación en Coordenadas Esféricas:** (r, θ, φ). Tenemos que $h_r = 1$, $h_\theta = r\sin(\varphi)$ y $h_\varphi = r$, por lo tanto:

$$\boxed{dV = r^2 \sin(\varphi)\, drd\theta d\varphi}$$



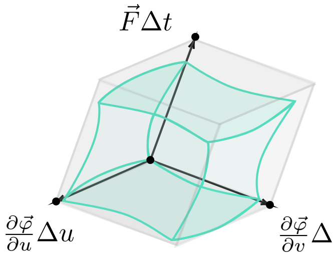
- **Integral de Flujo de un Campo Vectorial**

Consideremos un fluido sometido a un campo de velocidades $\vec{f}$ y una superficie S inmersa en este fluido como se muestra en la siguiente figura:



Supondremos que S es una superficie regular orientable, cuyo campo de vectores normales es denotado por $\hat{n}$. Sea además $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización regular de esta superficie S, entonces la cantidad $\vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \hat{n}(u, v)$ representa la rapidez, en la dirección normal, con que las partículas que pasan por el punto $\vec{\varphi}(u, v) \in S$ atraviesan S. Si esta rapidez es cero, significa que la velocidad sólo tiene una componente tangencial a la superficie, en cuyo caso las partículas no pasan a través de ella en ese punto. De esta forma, en un pequeño lapso de tiempo Δt, la cantidad de volumen de líquido que atraviesa un pequeño elemento de superficie ΔS de área dada por ΔA, es aproximadamente igual a:

$$\Delta V \approx \left(\vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \hat{n}\right) \Delta t \Delta A$$



Como $\Delta A \approx \left\| \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \right\| \Delta u \Delta v$ de la definición del campo normal $\hat{n}$ obtenemos que:

$$\Delta V \approx \left(\vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\right)\right) \Delta u \Delta v \Delta t$$

Cuyo lado derecho no es otra cosa que el volumen del paralelepípedo descrito por los vectores $\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\Delta u$, $\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\Delta v$ y $\vec{F}\Delta t$. Formalmente, sumando sobre todos los elementos de superficie y pasando al límite se obtiene la siguiente fórmula para el **caudal** (volumen por unidad de tiempo) instantáneo que atraviesa la superficie S en el sentido del campo de normales dado por la parametrización:

$$\begin{aligned} \text{Caudal}^S_{inst} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_{tot}}{\Delta t} \\ &= \iint_D \left(\vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\right)\right) dudv \\ &= \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA \end{aligned}$$

Sean S una superficie regular orientable, $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de normales continuo sobre S, y $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido sobre un abierto Ω que contiene a S. Definimos la **integral de flujo** del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S orientada según $\hat{n}$ mediante:

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA \\ &= \iint_D \vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}(u, v)\right) dudv \end{aligned}}$$

Donde $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S compatible con la orientación, esto es, tal que:

$$\hat{n} = \frac{\dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|}$$

Para interpretar correctamente el valor de la integral de flujo es necesario especificar el campo de normales $\hat{n}$. Por ejemplo, si orientamos un casquete esférico usando la normal exterior $\hat{n} = \hat{r}$, la integral de flujo corresponde al flujo neto que sale de la esfera a través del casquete. Si este valor fuese negativo, significa que lo que sale de la esfera no alcanza para compensar lo que entra, y por lo tanto existe un caudal neto positivo que entra a la esfera. Notemos que si la densidad del líquido no fuera uniforme sino que viniese dada por el campo escalar $\varrho\left(x, y, z\right)$), entonces el **flujo masivo** a través de la superficie S está dada por:

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \iint_S \varrho \vec{F} \cdot \hat{n} dA \\ &= \iint_D \varrho\left(\vec{\varphi}\left(u, v\right)\right) \vec{F}\left(\vec{\varphi}\left(u, v\right)\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}\left(u, v\right) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}\left(u, v\right)\right) dudv\end{aligned}$$

Esto no es otra cosa que la integral de flujo a través de S orientada según $\hat{n}$ del campo $\varrho \vec{F}$.

- ⋆ **Observación:** Si S es una superficie regular orientada según un campo de normales $\hat{n}$, y si S^- es la misma superficie pero con la orientación opuesta $-\hat{n}$, entonces se tiene que:

$$\iint_{S^-} \vec{F} \cdot d\vec{A} = -\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

- **Teorema de la Divergencia de Gauss**