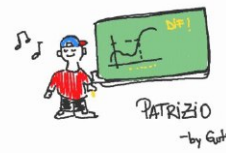


MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Carlos Conca.

Auxiliar: Patricio Yáñez A. y Javier Santidrián



Auxiliar 3: Coordenadas Ortogonales e Integral de Flujo

Resumen Resumen

- **Recuerdo Definición de Integral de flujo.** Sea S una superficie regular orientable, $\hat{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de normales continuo sobre S , y $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido sobre un abierto Ω que contiene a S . Se define la integral de flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S orientada según $\hat{n}$ mediante

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA &= \iint_D \vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \underbrace{\frac{\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|}}_{\hat{n}} \underbrace{\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|}_{dA} du dv = \\ &= \iint_D \vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u, v) \right] du dv \end{aligned}$$

donde $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S compatible con la orientación, esto es tal que

$$\hat{n} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|$$

- **Teorema de la Divergencia de Gauss.**

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase $\mathcal{C}^1$** sobre un abierto $U \supseteq \vec{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

- **Nota 1:** Notar que $\partial\Omega$ es una superficie **cerrada**.
- **Nota 2:** En coordenadas ortogonales el diferencial de volumen es $dV = h_u h_v h_w du dv dw$.
- **[Gradiente de un campo escalar]:** Sea f un campo escalar, al menos $\mathcal{C}^1$, se define el gradiente de f como

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

- **[Gradiente de un campo vectorial]:** Sea $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se define el gradiente de $\vec{F}$ como

$$\nabla \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- **[Campo Conservativo]:** Decimos que un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ si:

- Existe un campo escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\vec{F}(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z)$
- $\text{rot}(\vec{F}) = 0$

- **[Divergencia]:** Sea $\vec{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se define la divergencia de $\vec{F}$ como

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

- Si definimos $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$, podemos definir la divergencia como

$$\text{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

- **[Rotor]:** Sea $\vec{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se define el rotor de $\vec{F}$ como

$$\text{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k}$$

- Si definimos $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$, podemos definir el rotor como

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

- **[Laplaciano]:** Sea f un campo escalar, al menos $\mathcal{C}^2$, se define el laplaciano de f como

$$\Delta f = \nabla^2 f = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Análogamente, sea $\vec{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$. Se define su laplaciano de como

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_1\hat{i} + \Delta F_2\hat{j} + \Delta F_3\hat{k}$$

- **[Sistema Ortogonal]:** Se dice que el sistema de coordenadas $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$, con $(u, v, w) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$, es **ortogonal** si los vectores unitarios del triedro $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ definidos por

$$\hat{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|, \quad \hat{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|, \quad \hat{w} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|$$

son mutuamente ortogonales para cada $(u, v, w) \in D$.

- **[Factores de Escala]:** Corresponden a los siguientes valores reales:

$$h_u = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|, \quad h_v = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|, \quad h_w = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|$$

- Gracias a lo anterior, podemos definir entonces:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = h_u \hat{u}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = h_v \hat{v}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = h_w \hat{w}$$

- **[Coordenadas Cilíndricas]:** Corresponde a la transformación $\vec{r}(\rho, \theta, k) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, k)$, con los factores de escala dados por $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_k = 1$.

- **[Coordenadas Esféricas]:** Corresponde a la transformación $\vec{r}(r, \theta, \phi) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$, con los factores de escala dados por $h_r = 1$, $h_\theta = r \sin \phi$ y $h_\phi = r$.

- **[Gradiente en coordenadas ortogonales]**

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{u} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{v} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{w}$$

- **[Divergencia en coordenadas ortogonales]**

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial(F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial(F_v h_u h_w)}{\partial v} + \frac{\partial(F_w h_u h_v)}{\partial w} \right)$$

- **[Rotor en coordenadas ortogonales]**

$$\text{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

- **[Curva]:** Un conjunto Γ se llama curva si existe una función continua $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, llamada parametrización de la curva, tal que $\Gamma = \vec{r}([a, b])$. Además, la curva Γ puede ser:

- Suave, si $\vec{r} \in \mathcal{C}^1$.
- Regular, si $\|\vec{r}'\| > 0$.
- Simple, si $\vec{r}$ es inyectiva.
- Cerrada, si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

- **[Longitud de Curva]:** Se define la longitud de curva en el tiempo t como:

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau$$

- **[Parametrización natural]** Para obtener la parametrización natural (o de longitud de curva). Es necesario obtener la función de longitud de arco ($s(t)$) y luego desde esta relación despejar t en función s , para finalmente encontrar:

$$\vec{\sigma}(s) = \vec{r}(t(s))$$

Pregunta 1 Se nos presenta la parametrización $\vec{r}(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $a > 0$.

P1 (a) Se pide mostrar si es que la parametrización es suave, cerrada, simple o regular.

P1 (b) Se pide encontrar una parametrización en longitud de arco para la curva.

Pregunta 2 Se nos presenta la parametrización $\vec{r}(t) = (e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t), ct)$, con $t \in [0, \infty)$ y $c > 0$.

P2 (a) Se pide mostrar si es que la parametrización es suave, simple o regular y además calcular su función de longitud de arco.

Pregunta 2 Se nos presenta la parametrización $\vec{r}(t) = (e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t), ct)$, con $t \in [0, \infty)$ y $c > 0$.

P2 (a) Se pide mostrar si es que la parametrización es suave, simple o regular.

Referido a cada elemento pedido:

- Sobre si es suave, basta notar que las coordenadas de $\vec{r}(t)$: $e^{-t} \cos(t)$, $e^{-t} \sin(t)$ y ct son funciones $\mathcal{C}^1$, ya que estas forman las coordenadas de $\vec{r}(t)$, se tiene que $\vec{r} \in \mathcal{C}^1$ por lo que la parametrización es suave.
- Sobre si es simple, notemos que se puede hacer el siguiente desarrollo:

$$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{-t_1} \cos(t_1) \\ e^{-t_1} \sin(t_1) \\ ct_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t_2} \cos(t_2) \\ e^{-t_2} \sin(t_2) \\ ct_2 \end{pmatrix} \Rightarrow ct_1 = ct_2 \Rightarrow t_1 = t_2$$

Por lo que se tiene que $\vec{r}$ es inyectiva, así la curva es simple.

- Sobre si es regular, notemos que efectivamente es suave, y solo basta verificar que $\forall t \in [0, \infty)$, $\vec{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, en efecto:

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t) \\ -e^{-t} \sin(t) + e^{-t} \cos(t) \\ c \end{pmatrix}$$

Donde se tiene que:

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \infty) : \|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{(-e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t))^2 + (-e^{-t} \sin(t) + e^{-t} \cos(t))^2 + c^2} \\ &= \sqrt{e^{-2t} \cos^2(t) + (2e^{-2t} \cos(t) \sin(t)) + e^{-2t} \sin^2(t) + e^{-2t} \sin^2(t) - (2e^{-2t} \cos(t) \sin(t)) + e^{-2t} \cos^2(t) + c^2} \\ &= \sqrt{e^{-2t}(\cos^2(t) + \sin^2(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)) + c^2} = \sqrt{2e^{-2t} + c^2} > \sqrt{c^2} = c > 0 \end{aligned}$$

Donde $(\%) = 2e^{-2t} \cos(t) \sin(t)$. De esta forma $\forall t \in [0, \infty)$ se tiene que $\|\vec{r}'(t)\| > 0 \Leftrightarrow \vec{r}'(t) \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{r}'(t) \neq (0, 0)$, por lo que la curva es regular.

P2 (b) Se pide encontrar la función de longitud de arco y largo total para $c = 0$.

Comenzando por la función de longitud de arco.

$$s(t) = \int_0^t \frac{d\vec{r}(u)}{du} du = \int_0^t \sqrt{2e^{-2u}} du = \int_0^t \sqrt{2}e^{-u} du = \sqrt{2} [-e^{-u}]_{u=0}^{u=t} = \sqrt{2}(1 - e^{-t})$$

Así, el largo total corresponde a:

$$L(\Gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{2}(1 - e^{-t}) = \sqrt{2}$$

Considerando esto, para encontrar la parametrización en longitud de arco, se ubica $t(s)$ como:

$$s = \sqrt{2}(1 - e^{-t(s)}) \Rightarrow \frac{s}{\sqrt{2}} = 1 - e^{-t(s)} \Rightarrow e^{-t(s)} = \frac{\sqrt{2} - s}{\sqrt{2}} \Rightarrow t(s) = \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - s} \right)$$

De esta forma, la parametrización en longitud de arco corresponde a:

$$\sigma(s) = \vec{r}(t(s)) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-s}{\sqrt{2}} \cos\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-s}\right)\right) \\ \frac{\sqrt{2}-s}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-s}\right)\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3. Se definen las **coordenadas toroidales** (r, φ, θ) mediante

$$x = (R + r \operatorname{sen}(\varphi)) \cos \theta, \quad y = (R + r \operatorname{sen}(\varphi)) \operatorname{sen} \theta, \quad z = r \cos(\varphi)$$

donde $r \in [0, R]$, $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$.

P3 (a) Verifique que este sistema de coordenadas es ortogonal, y calcule la divergencia, el laplaciano, y el rotor en estas coordenadas.

P3 (b) Piense y proponga una forma de parametrizar un toroide de la siguiente característica $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Pregunta 4 Considere la semisuperficie esférica unitaria superior, luego la siguiente parametrización

$$x(u, v) = \operatorname{sen}(u) \cos(v), \quad y(u, v) = \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v), \quad z(u, v)$$

P4 (a) Determine donde vive u, v y sepa que son vectores ortogonales, calcule $\|r_u \times r_v\|$ y bajo la parametrización en cartesianas, pero en dos variables con $(x, y) \in B$, círculo de unidad, calcule $\|r_x \times r_y\|$.

P4 (b) Hallar la integral $f(x, y, z) = z^2$ sobre la superficie semiesférica unitaria y verifique la integral de superficie con el resultado usual.

Pregunta 5 Para el campo vectorial

$$\mathbf{A} = (x - y)\mathbf{u}_x + (x + y)\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z,$$

calcule su flujo a través de las siguientes superficies cerradas:

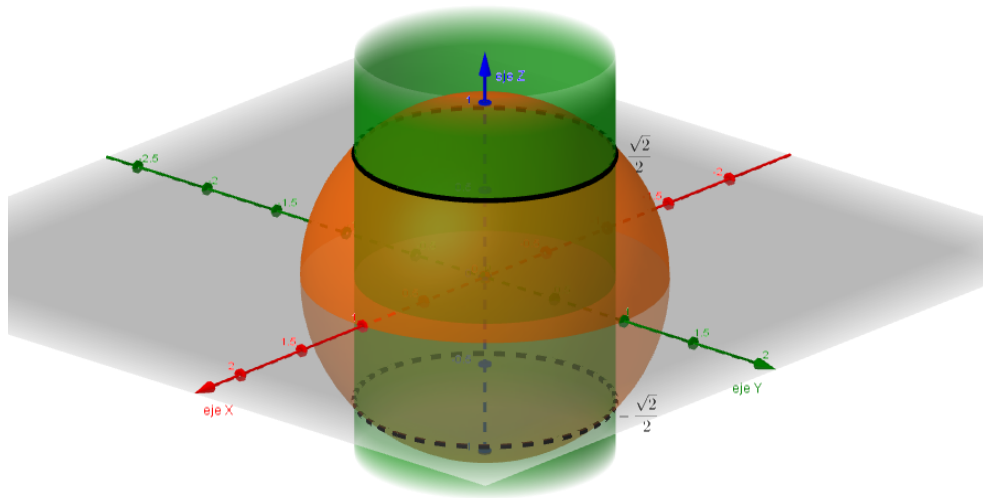
Un cubo de arista a , con un vértice en el origen y aristas $a\mathbf{u}_x, a\mathbf{u}_y, a\mathbf{u}_z$.

En cada caso, halle el flujo por integración directa y por aplicación del teorema de Gauss.

Pregunta 6 . Verifique el Teorema de la Divergencia, calculando por separado las integrales

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA; \int_{\Omega} \text{div}(\vec{F}) dV$$

con $\vec{F} = (x, y, z)$, $\Omega = D \cap G$ donde $D = \{x^2 + y^2 \geq 1/2\}$, $G = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ y donde $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.



Resumen Resumen

- Recuerdo Definición de Integral de flujo.** Sea S una superficie regular orientable, $\hat{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de normales continuo sobre S , y $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido sobre un abierto Ω que contiene a S . Se define la integral de flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S orientada según $\hat{n}$ mediante

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_D \vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right]}_{\hat{n}} \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right]}_{dA} du dv = \iint_D \vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right] du dv$$

donde $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S compatible con la orientación, esto es tal que

$$\hat{n} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|$$

Teorema de la Divergencia de Gauss.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 sobre un abierto $U \supseteq \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iiint_{\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \text{div} \vec{F} dV$$

- Nota 1:** Notar que $\partial\Omega$ es una superficie cerrada.

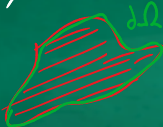
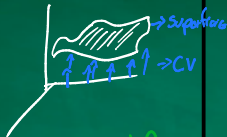
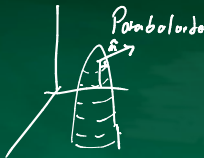
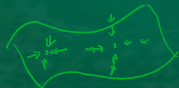
- Nota 2:** En coordenadas ortogonales el diferencial de volumen es $dV = h_u h_v h_w du dv dw$.

- [Gradiente de un campo escalar]:** Sea f un campo escalar, al menos C^1 , se define el gradiente de f como

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

- [Gradiente de un campo vectorial]:** Sea $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1 . Se define el gradiente de $\vec{F}$ como

$$\nabla \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$



frontera se refiere al "bordo" del espacio

1

Pregunta 1 Se nos presenta la parametrización $\vec{r}(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $a > 0$.

P1 (a) Se pide mostrar si es que la parametrización es suave, cerrada, simple o regular.

P1 (b) Se pide encontrar una parametrización en longitud de arco para la curva.

es!

1) 2) # lo importante es tomar una parametrización que apañe.

- [Curva]:** Un conjunto Γ se llama curva si existe una función continua $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, llamada parametrización de la curva, tal que $\Gamma = \vec{r}([a, b])$. Además, la curva Γ puede ser:

- Suave, si $\vec{r}' \in C^1$, es decir C^1 contiene a coordenada!
- Regular, si $\|\vec{r}'\| > 0$.
- Simple, si $\vec{r}$ es inyectiva.
- Cerrada, si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

- [Longitud de Curva]:** Se define la longitud de curva en el tiempo t como:

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau$$

- [Parametrización natural]** Para obtener la parametrización natural (o de longitud de curva). Es necesario obtener la función de longitud de arco $s(t)$ y luego desde esta relación despejar t en función s , para finalmente encontrar:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s))$$

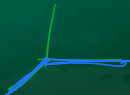
Simple = inyectiva. ||

$$\|\cdot\| \geq 0, \|\cdot\| \neq 0 \Rightarrow \|\cdot\| > 0$$

Cerrada



$$t(0) = t(2\pi)$$



Hint para acotar se

Suave = Suave + derivadas

los parámetros son derivables.

Regular

tz > 0



2

Por qué derivada bajo norma quiere decir no nula en su dominio?

$$\| \dot{\gamma}(t) \| > 0$$

$$\Leftrightarrow \left\| \frac{d\vec{F}(t)}{dt} \right\| > 0 \quad \int$$

$$\int \left\| \frac{d\vec{F}(t)}{dt} \right\| > c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ no es nula!

- [Longitud de Curva]: Se define la longitud de curva en el tiempo t como:

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau$$
- [Parametrización natural] Para obtener la parametrización natural (o de longitud de curva). Es necesario obtener la función de longitud de arco $(s(t))$ y luego desde esta relación despejar t en función s , para finalmente encontrar:

$$\vec{\sigma}(s) = \vec{r}(t(s))$$

P1 $\vec{F}(t) = (a \cos(t), a \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$
 $a > 0$

suave = C^1 ; ya se por C.Dif. General.

$\cos(x)$ y $\sin(x)$ son clase C^∞

$\Rightarrow$ $\cos(x)$ será C^1 en particular
 $\sin(x)$ será C^1 en particular,

luego una parametrización es calor no quita la calidad de C^1 pues derivada es lineal. (3)

$$\therefore a \cos(t), a \sin(t) \text{ son } C^1 //$$

(Regular) $|Z| > 0$

$$\left\| \frac{d\vec{F}(t)}{dt} \right\| ; \text{ calculamos } \frac{d\vec{F}(t)}{dt}$$

$$\vec{F}(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$$

$$\begin{aligned} (\cos(x))' &= -\sin(x) \\ (\sin(x))' &= \cos(x) \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{F}(t)}{dt} = (-a \sin(t), a \cos(t))$$

norma euclídea

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &= \sqrt{\cdot^2} \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{F}(t)}{dt} \right\| = \sqrt{(-a \sin(t))^2 + (a \cos(t))^2} \\ &= \sqrt{a^2 (\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_1)} \\ &= |a| = a \text{ pues } a > 0 \end{aligned}$$

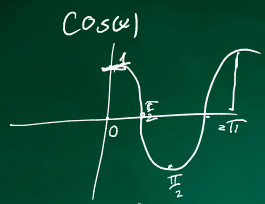
$$\therefore \left\| \frac{d\vec{F}(t)}{dt} \right\| = a > 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a \neq 0$$

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0 \Rightarrow \vec{\gamma}(t) \neq (0,0) //$$

$$\forall t \in [0, 2\pi]$$

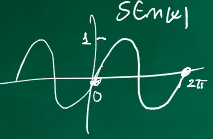
Calculamos $\vec{r}(0) = (a \cos(0), a \sin(0))$

Sea $0 \neq 2\pi$



$$= (a \cdot 1, 0) = (a, 0)$$

$$\wedge \vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi) = (a, 0)$$



$$\vec{r}(2\pi) = (a \cos(2\pi), a \sin(2\pi)) = (a \cdot 1, 0) = (a, 0)$$

con este contraejemplo no es simple.

$$\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi)$$

$$\therefore C \in \mathbb{R} + a da.$$

b)

P1 (b) Se pide encontrar una parametrización en longitud de arco para la curva.

• [Longitud de Curva]: Se define la longitud de curva en el tiempo t como:

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau$$

$$\vec{r}(t), t \in [0, 2\pi]$$

$$\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| = a$$

• [Parametrización natural] Para obtener la parametrización natural (o de longitud de curva). Es necesario obtener la función de longitud de arco $(s(t))$ y luego desde esta relación despejar t en función s , para finalmente encontrar:

$$\vec{\sigma}(s) = \vec{r}(t(s))$$

$$s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d\vec{r}(u)}{du} \right\| du = \int_0^t a du = [au]_0^t$$

$$s(t) = at$$

$$y_0 \text{ que } t \in [0, 2\pi] \quad t(s) \Rightarrow \left[\frac{s}{a} = t \right] = t(s)$$

$$\sigma(s) = \vec{r}(t(s)) = (a \cos(\frac{s}{a}), a \sin(\frac{s}{a}))$$

$$s \in [0, \sigma(2\pi)] = [0, 2\pi a] = [0, 2\pi a] - [0, 2\pi a]$$

(6)

¿Simple? inyectividad.

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \quad \# \quad p \Rightarrow q \Rightarrow$$

$$f(x) \neq f(y) \quad (v) \quad x = y \xrightarrow{\text{negación}} f(x) = f(y) \wedge x \neq y$$

Esto es set inyectivo, ¿Qué set no es inyectivo?

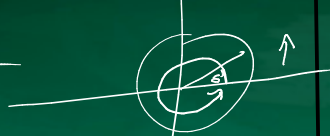
(5)

$\vec{r}(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$

Polar



Parametrización natural



$t \in [0, 2\pi]$

$s(t)$
 $t(s)$

$[0, 2\pi a]$

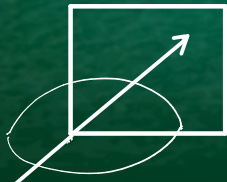
p4)

Pregunta 4 Considere la semisuperficie esférica unitaria superior, luego la siguiente parametrización

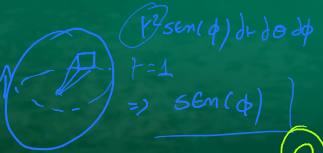
$x(u, v) = \sin(u)\cos(v), y(u, v) = \sin(u)\sin(v), z(u, v) = \cos(u)$

P4 (a) Determine donde vive u, v y sepa que son vectores ortogonales, calcule $\|r_u \times r_v\|$ y bajo la parametrización en cartesianas, pero en dos variables con $(x, y) \in B$, círculo de unidad, calcule $\|r_u \times r_v\|$.

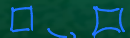
P4 (b) Hallar la integral $f(x, y, z) = z^2$ sobre la superficie semiesférica unitaria y verifique la integral de superficie con el resultado usual.



solo la parte superior



$\int \int \sin(\phi) d\phi d\theta$
 $r=1 \Rightarrow \sin(\phi)$



corresponden los dos factores en la

7

x, y, z
variedad
 dx, dy, dz

Cartesiano

Otro plano

$f: \Gamma(x, y, z) \rightarrow \mathbb{R}^2(u, v)$

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, recordar $\vec{u}, \vec{v}$

$\|r_u \times r_v\| = \left\| \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial v} \right\|$

Recordemos por enunciado

$x(u, v) = \sin(u)\cos(v)$
 $y(u, v) = \sin(u)\sin(v)$

$z(u, v) = \cos(u)$

1) $\vec{r}(u, v) = (\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u))$
2) $r_u = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} = (\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), -\sin(u))$
3) $r_v = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} = (-\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), 0)$

8

$$1) \vec{r}(u, v) = (\text{sen}(u) \cos(v), \text{sen}(u) \text{sen}(v), \cos(u)) \quad \vec{z}(u, v) = \cos(u)$$

$$2) r_u = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} = (\cos(u) \cos(v), \cos(u) \text{sen}(v), -\text{sen}(u)) \in \mathbb{R}^3$$

$$3) r_v = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} = (-\text{sen}(u) \text{sen}(v), \text{sen}(u) \cos(v), 0) \in \mathbb{R}^3$$

Recordemos el producto cruz

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(u) \cos(v) & \cos(u) \text{sen}(v) & -\text{sen}(u) \\ -\text{sen}(u) \text{sen}(v) & \text{sen}(u) \cos(v) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} [\cancel{\cos(u) \text{sen}(v)} \cdot 0 - -\text{sen}^2(u) \cos(v)]$$

$$- \hat{j} [\cancel{\cos(u) \cos(v)} \cdot 0 - \text{sen}^2(u) \text{sen}(v)]$$

$$+ \hat{k} [\text{sen}(u) \cos(u) \cos^2(v) - -\text{sen}(u) \cos(u) \text{sen}^2(v)]$$

$$= \hat{i} \text{sen}^2(u) \cos(v) + \hat{j} \text{sen}^2(u) \text{sen}(v)$$

$$+ \hat{k} [\text{sen}(u) \cos(u) \underbrace{[\cos^2(v) + \text{sen}^2(v)]}_1]$$

$$= \text{sen}(u) (\text{sen}(u) \cos(v), \text{sen}(u) \text{sen}(v), \cos(u)) \quad (9)$$

$$= \text{sen}(u) r(u, v)$$

Veamos su norma, sume cada tipo al cuadrado.

$$\|r_u \times r_v\| = \sqrt{\text{sen}^4(u) \cos^2(v) + \text{sen}^4(u) \text{sen}^2(v) + \text{sen}^2(u) \cos^2(u)}$$

$$= \sqrt{\text{sen}^4(u) [\cos^2(v) + \text{sen}^2(v)] + \text{sen}^2(u) \cos^2(u)}$$

$$= \sqrt{\text{sen}^2(u) [\underbrace{\text{sen}^2(u) + \cos^2(u)}_1]}$$

$$= \sqrt{\text{sen}^2(u)} = |\text{sen}(u)| \quad ; \text{ pero } u \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{si } u \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$= \text{sen}(u)$$

media es la se
a se me ja

$$\Rightarrow \text{sen}(u) \geq 0$$



Veamos ahora otra forma de parametrizarlo, ahora $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, usaremos $r(x,y, f(x,y)) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, $(x,y) \in B$ siendo B un círculo unitario.

$$1) \vec{F}_x = \left(1, 0, \frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot -2x \right) = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

$$2) \vec{F}_y = \left(0, 1, \frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot -2y \right) = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

$$\|r_x \times r_y\| = \left\| \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

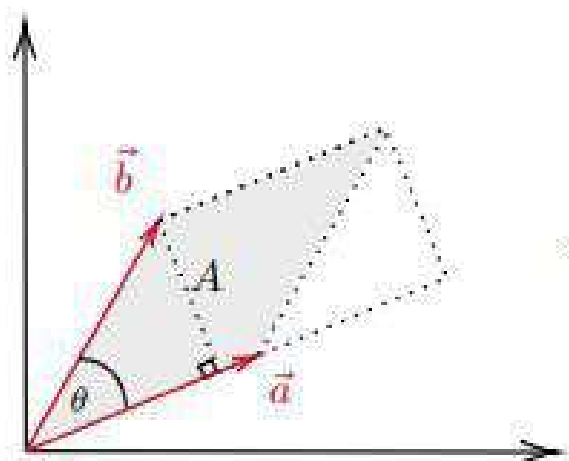
Esto nos da algo con $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ luego cada elemento al cuadrado bajo raíz

da esto al final.

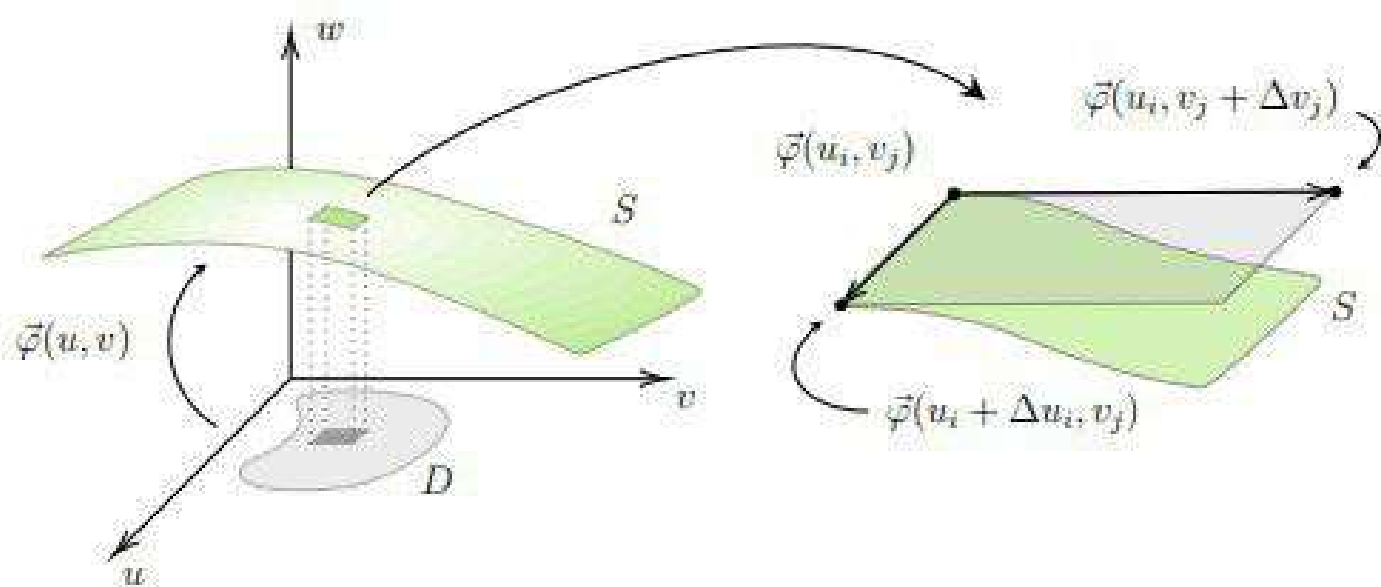


Ya terminamos!

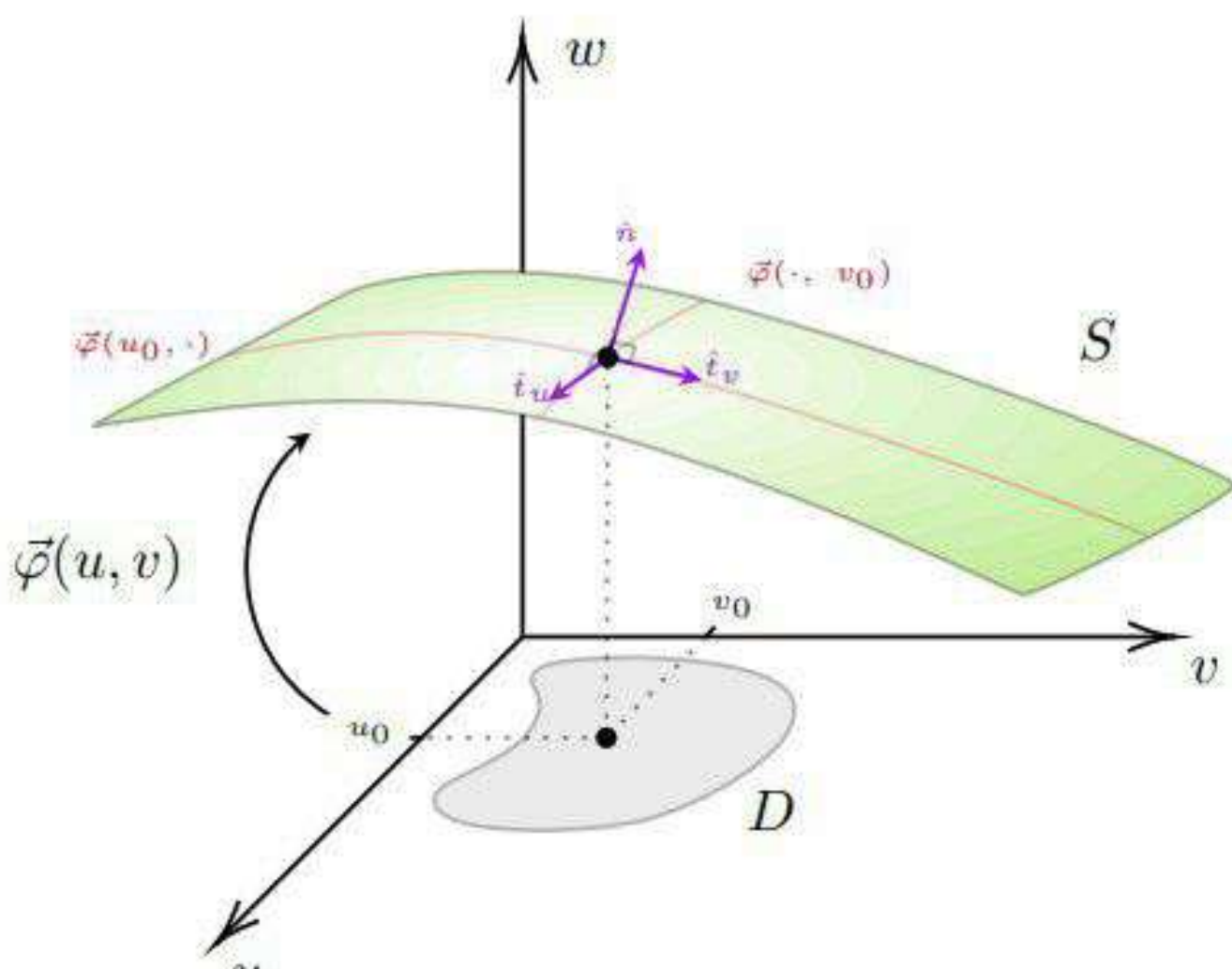
Cualquier duda a pyanez@din.uchile.cl

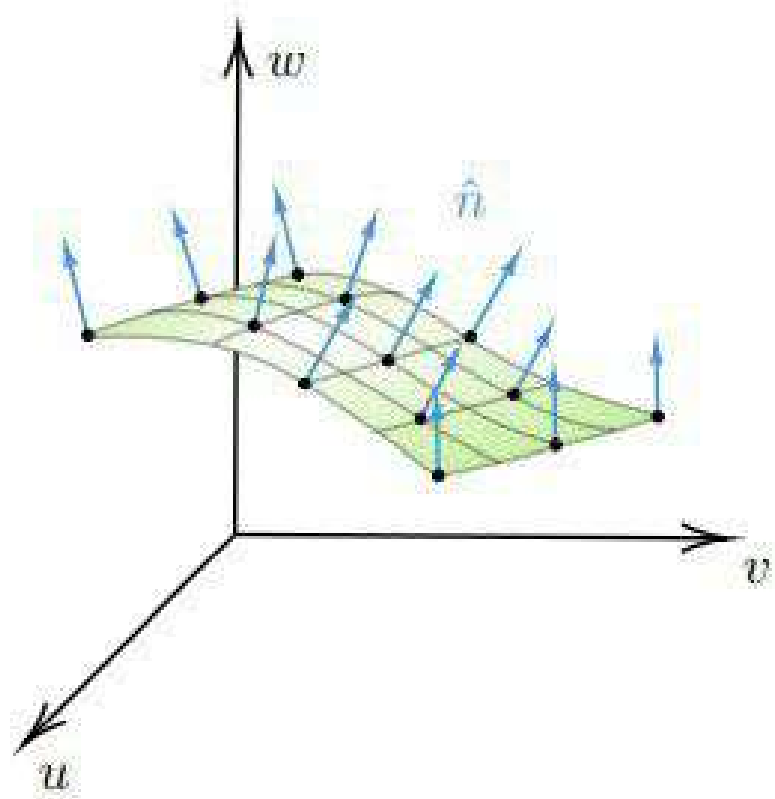


$$A = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\theta)$$



$$\hat{t}_u = \frac{\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \right\|} \quad \hat{t}_v = \frac{\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|}$$





★ Aplicación en Coordenadas Esféricas: (r, θ, φ) . Tenemos que $h_r = 1$, $h_\theta = r \sin(\varphi)$ y $h_\varphi = r$, por lo tanto:

$$dV = r^2 \sin(\varphi) dr d\theta d\varphi$$

