MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Carlos Conca.
Auxiliar: Patricio Yáñez A. y Javier Santidrián

Auxiliar 3: Coordenadas Ortogonales e Integral de Flujo

Resumen Resumen

- **Recuerdo Definición de Integral de flujo.** Sea S una superficie regular orientable, $\hat{n}: S \to \mathbb{R}^3$ un campo de normales continuo sobre S, y $\overrightarrow{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido sobre un abierto Ω que contiene a S. Se define la integral de flujo del campo $\overrightarrow{F}$ a través de la superficie S orientada según $\hat{n}$ mediante

$$\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iint\limits_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{\varphi}(u,v)) \cdot \underbrace{\frac{\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\|}}_{\hat{n}} \underbrace{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\| du\, dv}_{dA} =$$

$$= \iint\limits_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{\varphi}(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v}(u,v) \right] du\, dv$$

donde $\overrightarrow{\varphi}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S compatible con la orientación, esto es tal que

$$\hat{n} = \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \Big/ \left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\|$$

- **Teorema de la Divergencia de Gauss.**
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\overrightarrow{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** sobre un abierto $U \supseteq \overrightarrow{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \iiint\limits_{\Omega} (\overrightarrow{F})\, dV$$

  - **Nota 1:** Notar que $\partial\Omega$ es una superficie **cerrada**.
  - **Nota 2:** En coordenadas ortogonales el diferencial de volumen es $dV = h_u h_v h_w\, du\, dv\, dw$.

- [**Gradiente de un campo escalar**]: Sea f un campo escalar, al menos $\mathcal{C}^1$, se define el gradiente de f como

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

- [**Gradiente de un campo vectorial**]: Sea $\overrightarrow{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se define el gradiente de $\overrightarrow{F}$ como

$$\nabla \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- [**Campo Conservativo**]: Decimos que un campo vectorial $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow R^3$ si:
  - Existe un campo escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \nabla\phi(x,y,z)$
  - $rot(\overrightarrow{F}) = 0$
- [**Divergencia**]: Sea $\overrightarrow{F} = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se define la divergencia de $\overrightarrow{F}$ como

$$div\overrightarrow{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

- Si definimos $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$, podemos definir la divergencia como

$$div\overrightarrow{F} = \nabla \cdot \overrightarrow{F}$$

- [**Rotor**]: Sea $\overrightarrow{F} = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se define el rotor de $\overrightarrow{F}$ como

$$rot\overrightarrow{F} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z})\hat{\imath} + (\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x})\hat{\jmath} + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\hat{k}$$

- Si definimos $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$, podemos definir el rotor como

$$rot\overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

- [**Laplaciano**]: Sea f un campo escalar, al menos $\mathcal{C}^2$, se define el laplaciano de f como

$$\triangle f = \nabla^2 f = div(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

  Análogamente, sea $\overrightarrow{F} = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$. Se define su laplaciano de como

$$\triangle\overrightarrow{F} = \triangle F_1\hat{\imath} + \triangle F_2\hat{\jmath} + \triangle F_3\hat{k}$$

- [**Sistema Ortogonal**]: Se dice que el sistema de coordenadas $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v,w)$, con $(u,v,w) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$, es **ortogonal** si los vectores unitarios del triedro $\{\hat{u}, \hat{v}.\hat{w}\}$ definidos por

$$\hat{u} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u}/||\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u}||, \quad \hat{v} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial v}/||\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial v}||, \quad \hat{w} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}/||\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}||$$

  son mutuamente ortogonales para cada $(u,v,w) \in D$.
- [**Factores de Escala**]: Corresponden a los siguientes valores reales:

$$h_u = ||\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u}||, \quad h_v = ||\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial v}||, \quad h_w = ||\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}||$$

- Gracias a lo anterior, podemos definir entonces:

$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u} = h_u\hat{u}, \quad \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial v} = h_v\hat{v}, \quad \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w} = h_w\hat{w}$$

- [**Coordenadas Cilíndricas**]: Corresponde a la transformación $\overrightarrow{r}(\rho, \theta, k) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, k)$, con los factores de escala dados por $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_k = 1$.
- [**Coordenadas Esféricas**]: Corresponde a la transformación $\overrightarrow{r}(r, \theta, \phi) = (r \sin\phi \cos\theta, r \sin\phi \sin\theta, r \cos\phi)$, con los factores de escala dados por $h_r = 1$, $h_\theta = r \sin\phi$ y $h_\phi = r$.
- [**Gradiente en coordenadas ortogonales**]

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

- [**Divergencia en coordenadas ortogonales**]

$$div(\overrightarrow{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial(F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial(F_v h_u h_w)}{\partial v} + \frac{\partial(F_w h_u h_v)}{\partial w}\right)$$

- [**Rotor en coordenadas ortogonales**]

$$rot(\overrightarrow{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

- [**Curva**]: Un conjunto Γ se llama curva si existe una función continua $\overrightarrow{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, llamada parametrización de la curva, tal que $\Gamma = \overrightarrow{r}([a,b])$. Además, la curva Γ puede ser:
  - Suave, si $\overrightarrow{r} \in \mathcal{C}^1$.
  - Regular, si $||\overrightarrow{r}'|| > 0$.
  - Simple, si $\overrightarrow{r}$ es inyectiva.
  - Cerrada, si $\overrightarrow{r}(a) = \overrightarrow{r}(b)$.
- [**Longitud de Curva**]: Se define la longitud de curva en el tiempo t como:

$$s(t) = \int_a^t ||\frac{d\overrightarrow{r}(\tau)}{d\tau}||d\tau$$

- [**Parametrización natural**] Para obtener la parametrización natural (o de longitud de curva). Es necesario obtener la función de longitud de arco ($s(t)$) y luego desde esta relación despejar t en función s, para finalmente encontrar:

$$\overrightarrow{\sigma}(s) = \overrightarrow{r}(t(s))$$

Pregunta 1 Se nos presenta la parametrización $\overrightarrow{r}(t) = (a\cos(t), a\operatorname{sen}(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $a > 0$.

P1 (a) Se pide mostrar si es que la parametrización es suave, cerrada, simple o regular.

P1 (b) Se pide encontrar una parametrización en longitud de arco para la curva.

Pregunta 2 Se nos presenta la parametrización $\overrightarrow{r}(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\operatorname{sen}(t), ct)$, con $t \in [0, \infty)$ y $c > 0$.

P2 (a) Se pide mostrar si es que la parametrización es suave, simple o regular y además calcular su función de longitud de arco.

Pregunta 3. Se definen las **coordenadas toroidales** (r, φ, θ) mediante

$$x = (R + r \operatorname{sen}(\varphi)) \cos \theta,\ y = (R + r \operatorname{sen}(\varphi)) \operatorname{sen} \theta,\ z = r \cos(\varphi)$$

donde $r \in [0, R]$, $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$.

P3 (a) Verifique que este sistema de coordenadas es ortogonal, y calcule la divergencia, el laplaciano, y el rotor en estas coordenadas.

P3 (b) Piense y proponga una forma de paramtrizar un toroide de la siguiente caracteristica $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Pregunta 4 Considere la semisuperficie esférica unitaria superior, luego la siguiente parametrización

$$x(u, v) = sen(u)cos(v), y(u, v) = sen(u)sen(v), z(u, v)$$

P4 (a) Determine donde vive u, v y sepa que son vectores ortogonales, calcule $||r_u \times r_v||$ y bajo la parametrización en cartesianas, pero en dos variables con $(x, y) \in B$, círculo de unidad, calcule $||r_x \times r_y||$.

P4 (b) Hallar la integral $f(x, y, z) = z^2$ sobre la superficie semiesférica unitaria y verifique la integral de superficie con el resultado usual.

Pregunta 5 Para el campo vectorial

$\mathbf{A} = (x - y)\mathbf{u}_x + (x + y)\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$,

calcule su flujo a través de las siguientes superficies cerradas:

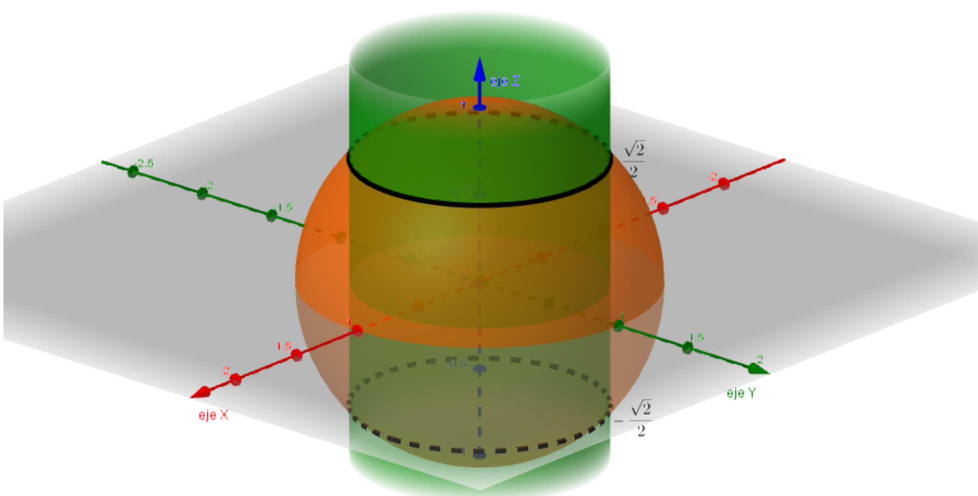
Un cubo de arista a, con un vértice en el origen y aristas $a\mathbf{u}_x, a\mathbf{u}_y, a\mathbf{u}_z$.

En cada caso, halle el flujo por integración directa y por aplicación del teorema de Gauss.

Pregunta 6 . Verifique el Teorema de la Divergencia, calculando por separado las integrales

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot \hat{n}\, dA; \int_{\Omega} div(\overrightarrow{F})\, dV$$

con $\overrightarrow{F} = (x, y, z)$, $\Omega = D \cap G$ donde $D = \{x^2 + y^2 \geq 1/2\}$, $G = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ y donde $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.



Interpretación física de Gradiente, Divergencia y Rotacional

Gradiente

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Definimos el gradiente de f en x como

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

El vector $\nabla f(x)$ es perpendicular a las curvas de nivel $C_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = \lambda\}$. Además el gradiente da la dirección de máximo crecimiento de f en el punto x. Para esto basta escribir, para un vector unitario v, la variación en la dirección de v como la derivada de $f(x + tv)$ que es:

$$df(x)v =< \nabla f(x), v >,$$

y que tiene valor máximo cuando v es paralelo a $\nabla f(x)$, es decir con $v = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$. Para este vector, la fórmula da exactamente $df(x)v = |\nabla f(x)|$.

Rotacional y divergencia

Sea $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial

$$E(x_1, x_2, x_3) = (E_1(x_1, x_2, x_3), E_2(x_1, x_2, x_3), E_3(x_1, x_2, x_3)).$$

Pensemos en E como el campo de velocidades de un fluido. En cada punto nos da la velocidad de la partícula correspondiente. Entonces la curva descrita por una partícula comenzando en p está dada por $p(t)$ con

$$p'(t) = E(p(t)), t > 0,$$

y $p(0) = p$. Veamos como evoluciona un paralelepípedo con vértice en p. Sea $h_i(t)$ una de sus tres aristas partiendo en p $(i = 1, 2, 3)$, es decir, $p(t) + h_i(t)$ es un vértice contiguo a $p(t)$ del paralelepípedo. La evolución del sistema dice que

$$p'(t) + h_i'(t) = E(p(t) + h_i(t)) = E(p(t)) + DE(p(t))h_i(t) + o(h_i(t)),$$

usando el desarrollo de Taylor. Despreciando el último término (suponiendo que el paralelepípedo es muy pequeñito) tenemos que

$$h_i'(t) = DE(p(t))h_i(t), t > 0,$$

con la condición inicial $h_1(0) = (\epsilon, 0, 0)$, $h_2(0) = (0, \epsilon, 0)$ y $h_3(0) = (0, 0, \epsilon)$ y $\epsilon > 0$ pequeño.

Interpretemos ahora la divergencia. El volumen del paralelepípedo viene dado por $V(t) = det(h_1(t), h_2(t), h_3(t))$. La variación del volumen (como crece o decrece, o lo que es lo mismo, si el fluido se expande o contrae) viene dado por

$$V'(0) = det(h_1'(0), h_2(0), h_3(0)) + det(h_1(0), h_2'(0), h_3(0)) + det(h_1(0), h_2(0), h_3'(0)).$$

Usando que

$$DE(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial x_1} & \frac{\partial E_1}{\partial x_2} & \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} & \frac{\partial E_2}{\partial x_2} & \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E_3}{\partial x_1} & \frac{\partial E_3}{\partial x_2} & \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

y $h_i'(0) = DE(p)h_i(0)$, $i = 1, 2, 3$, tenemos que

$$h_i'(0) = \epsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_i} \\ \frac{\partial E_3}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

con lo que

$$V'(0) = \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \right) \epsilon^3 = divE(p)V(0).$$

Es decir la divergencia mide <u>la tasa de expansión o contracción del fluido</u>. El fluido es incompresible si $divE = 0$.

Interpretemos el rotacional. La aplicación que nos da la variación de $h_i(t)$, $DE(p)$ se descompone en parte simétrica y antisimétrica: $DE(p) = S(p) + R(p)$. La parte antisimétrica es

$$R(p) = \frac{1}{2}(DE(p) - DE(p)^T) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = rotE = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix}$$

Supongamos que no hay parte simétrica, es decir que $S(p) = 0$. Entonces la ecuación $h_i'(t) = R(p(t))h_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, tiene solución que se aproxima en $t = 0$ a primer orden por

$$h_i(t) = \exp(R(p)t)h_i(0)$$

(nótese que la t ha cambiado de sitio). $\exp(R(p)t)$ es un giro con respecto al eje determinado por ξ de ángulo $|\xi|t$ (¡prueba esto, que es fácil!). Luego el paralelepípedo rota y el rotacional da <u>la dirección y la velocidad de giro</u>.

Teorema de la divergencia de Gauss

Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ un dominio regular del espacio, con lo que $S = \partial D$ es una superficie. Denotamos $\mathbf{N}$ al vector normal unitario exterior a S. El teorema de Gauss dice que para todo campo E de clase C^1 en $\bar{D}$ se tiene que

$$\int\int\int_D divE\, dx = \int\int_S < E, \mathbf{N} > d\mu.$$

El producto $< E, \mathbf{N} >$ es la componente normal del vector E a la superficie. La integral $\int\int\int_D f dx$ es una integral de volumen en D, que se hace por Fubini. La integral $\int\int_S f d\mu$ es una integral de superficie. Recordemos que esto se calcula tomando una parametrización (o varias y luego sumando) $\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ y

$$\int\int_S f = \int\int_{(u,v)} f(u, v) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| dudv.$$

De hecho la normal unitaria es

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right|}$$

Ejercicio: Calcular la integral de superficie de la función $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ en la esfera. Si no sabes hacer esto debes repasar Cáculo III.

El teorema de Gauss tiene significado físico: si E es un campo de vectores describiendo el movimiento de un fluido, entonces la integral de superficie es la cantidad de fluido que entra o sale por la superficie (según el signo). La integral en D mide cuando se comprime o expande el fluido en el interior. Obviamente coinciden.