MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Carlos Conca. opi0.36opi
Auxiliar: Patricio Yáñez A. y Javier Santidrián

Auxiliar 2: Cálculo Vectorial, factores de Escala y Operadores fundamentales

Resumen

- [**Gradiente de un campo escalar**]: Sea f un campo escalar, al menos $\mathcal{C}^1$, se define el gradiente de f como
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

- [**Gradiente de un campo vectorial**]: Sea $\overrightarrow{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se define el gradiente de $\overrightarrow{F}$ como
$$\nabla\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- [**Campo Conservativo**]: Decimos que un campo vectorial $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow R^3$ si:
  - Existe un campo escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$
  - $rot(\overrightarrow{F}) = 0$

- [**Divergencia**]: Sea $\overrightarrow{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se define la divergencia de $\overrightarrow{F}$ como
$$div\overrightarrow{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

- Si definimos $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$, podemos definir la divergencia como
$$div\overrightarrow{F} = \nabla \cdot \overrightarrow{F}$$

- [**Rotor**]: Sea $\overrightarrow{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se define el rotor de $\overrightarrow{F}$ como
$$rot\overrightarrow{F} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z})\hat{i} + (\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x})\hat{j} + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\hat{k}$$

- Si definimos $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$, podemos definir el rotor como
$$rot\overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

- **[Laplaciano]**: Sea f un campo escalar, al menos $\mathcal{C}^2$, se define el laplaciano de f como

$$\triangle f = \nabla^2 f = div(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Análogamente, sea $\overrightarrow{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$. Se define su laplaciano de como

$$\triangle \overrightarrow{F} = \triangle F_1\hat{i} + \triangle F_2\hat{j} + \triangle F_3\hat{k}$$

- **[Sistema Ortogonal]**: Se dice que el sistema de coordenadas $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v,w)$, con $(u,v,w) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$, es **ortogonal** si los vectores unitarios del triedro $\{\hat{u}, \hat{v}.\hat{w}\}$ definidos por

$$\hat{u} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}/||\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}||, \quad \hat{v} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}/||\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}||, \quad \hat{w} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial w}/||\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial w}||$$

son mutuamente ortogonales para cada $(u,v,w) \in D$.

- **[Factores de Escala]**: Corresponden a los siguientes valores reales:

$$h_u = ||\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}||, \quad h_v = ||\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}||, \quad h_w = ||\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial w}||$$

- Gracias a lo anterior, podemos definir entonces:

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = h_u\hat{u}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = h_v\hat{v}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial w} = h_w\hat{w}$$

- **[Coordenadas Cilíndricas]**: Corresponde a la transformación $\overrightarrow{r}(\rho,\theta,k) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, k)$, con los factores de escala dados por $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_k = 1$.

- **[Coordenadas Esféricas]**: Corresponde a la transformación $\overrightarrow{r}(r,\theta,\phi) = (r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$, con los factores de escala dados por $h_r = 1$, $h_\theta = r\sin\phi$ y $h_\phi = r$.

- **[Gradiente en coordenadas ortogonales]**

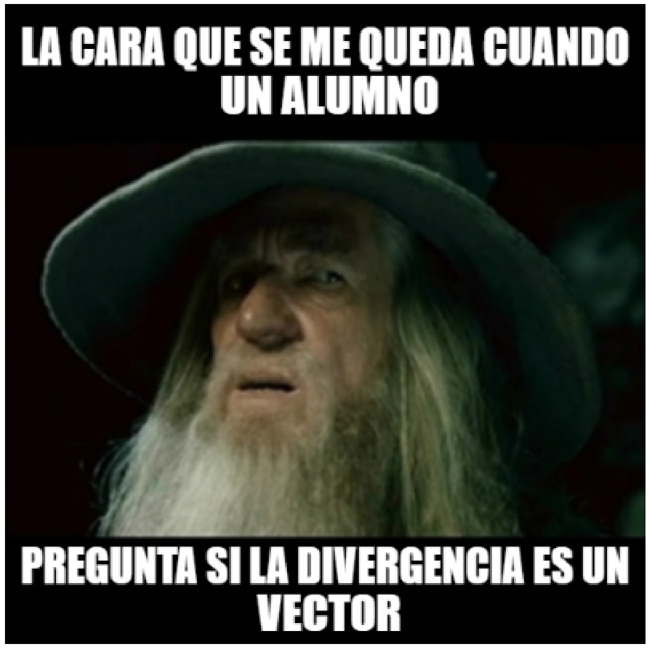
$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

- **[Divergencia en coordenadas ortogonales]**

$$div(\overrightarrow{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}(\frac{\partial(F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial(F_v h_u h_w)}{\partial v} + \frac{\partial(F_w h_u h_v)}{\partial w})$$

- **[Rotor en coordenadas ortogonales]**

$$rot(\overrightarrow{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$



P1. Sean $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial, sean $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ campos escalares, todos suficientemente diferenciables de modo que las expresiones siguientes estén bien definidas. Pruebe las siguientes identidades:

a) $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + \nabla f \cdot g$

b) $div(f\overrightarrow{F}) = \nabla f \cdot \overrightarrow{F} + f \cdot div(\overrightarrow{F})$

c) $rot(f\overrightarrow{F}) = \nabla f \times \overrightarrow{F} + f \cdot rot(\overrightarrow{F})$

d) $div(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \cdot (\nabla \times \overrightarrow{F}) - \overrightarrow{F} \cdot (\nabla \times \overrightarrow{G})$

P2. Dado el campo vectorial $\overrightarrow{F} = -z\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + x\hat{k}$.

a) ¿Existe un campo escalar u tal que $\nabla u = \overrightarrow{F}$?

b) ¿Existe un campo vectorial $\overrightarrow{G}$ tal que $rot\overrightarrow{G} = \overrightarrow{F}$?

P3. Calcular

1. Calcule el gradiente de
$$f(x,y,z) = \frac{\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{x^2+y^2+z^2}.$$

2. Calcule la divergencia del siguiente campo:
$$\begin{pmatrix} F \\ = \end{pmatrix} \frac{1}{x^2+y^2}[\,(x - y\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\imath} + (y + x\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\jmath} + z(x^2+y^2)\hat{k}\,].$$

P4. Diremos que un campo vectorial $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3$-{eje Z} $\longrightarrow \mathbb{R}^3$ tiene simetría cilíndrica si puede escribirse en coordenadas cilíndricas como:
$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = F_\rho(\rho)\hat{\rho}, \quad \rho > 0$$
para alguna función $F_\rho : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$.

a) Muestre que todo campo con simetría cilíndrica es irrotacional.

b) Verifique que si un campo tiene simetría cilíndrica, entonces:

$$div(\overrightarrow{F}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(F_\rho \rho)}{\partial \rho}$$

c) Deduzca que un campo $\overrightarrow{F}$ con simetría solenoidal (de divergencia nula) en $\mathbb{R}^3$-{eje Z} si y sólo si:

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = \frac{K}{\rho}\hat{\rho}$$

con K una constante real.

P5. Verifique si los siguientes campos son conservativos.

a) $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = (y^2 \cos x + z^3)\hat{\imath} + (2y \sin x - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$

b) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (\frac{y}{z^2+4}, \frac{x}{z^2+4}, \frac{-2xyz}{z^4+8z^2+16})$

Matraca clásica, ver resumen y darle

P6. a) Sea $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$ pruebe que $rot(rot(\overrightarrow{F})) = \nabla(\nabla \cdot \overrightarrow{F}) - \nabla^2 \overrightarrow{F}$.

b) Los campos vectoriales $\overrightarrow{E}$ (campo eléctrico) y $\overrightarrow{H}$ (campo magnético) son solenoidales y están relacionados por las ecuaciones:

$$rot(\overrightarrow{E}) = -\mu\frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t} \quad rot(\overrightarrow{H}) = \epsilon\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

P7. (En vola se pate a ala otra seman)Se definen las **coordenadas toroidales** (r, φ, θ) mediante

$$x = (R + r\,\mathrm{sen}(\varphi))\cos\theta,\ y = (R + r\,\mathrm{sen}(\varphi))\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = r\cos(\varphi)$$

donde $r \in [0, R]$, $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$. Verifique que este sistema de coordenadas es ortogonal, y calcule la divergencia, el laplaciano, y el rotor en estas coordenadas.

Ejercicios Propuestos

P1. Demuestre las siguientes identidades:

a) $div(rot(\overrightarrow{F})) = 0$

b) $rot(\nabla f) = 0$

c) $div(\nabla f \times \nabla g) = 0$

d) $\triangle \overrightarrow{F} = \nabla(div \overrightarrow{F}) - rot(rot \overrightarrow{F})$

e) $\triangle(fg) = f\triangle g + g\triangle f + 2\nabla f \cdot \nabla g$

f) $rot(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{F} div(\overrightarrow{G}) - \overrightarrow{G} div(\overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{G} \cdot \nabla)\overrightarrow{F} - (\overrightarrow{F} \cdot \nabla)\overrightarrow{G}$

P2. Compruebe que el campo vectorial en coordenadas cilíndricas $f(\rho, \theta, z) = 6\rho \sin(\frac{\theta}{2})\hat{\rho} + 24\rho \cos(\frac{\theta}{2})\hat{\theta}$.

P3. Una esfera centrada en el origen de masa m, radio a y densidad uniforme tiene un potencial gravitatorio denotado por u y una fuerza gravitatoria denotada por F. Donde

- Si $r < a$, $u = \frac{3m}{2a} - \frac{mr^2}{2a^3}$ y $F = \frac{mr}{a^3}\hat{r}$.
- Si $r \geq a$, $u = \frac{m}{r}$ y $F = \frac{m}{r^2}\hat{r}$.

a) Compruebe que $F = -\nabla u$ dentro y fuera de la esfera.

b) Pruebe que dentro de la esfera, u satisface que $\nabla^2 u$ es constante.

c) Pruebe que fuera de la esfera, u satisface que $\nabla^2 u = 0$.

P4. Sea ϕ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ y $\overrightarrow{G}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$, ambos definidos en $\mathbb{R}^3$. Se define el campo $\overrightarrow{F}$ por $\overrightarrow{F} = \nabla\phi + \mu\nabla \times \overrightarrow{G}$, donde μ es una constante real. Demuestre que $div(\overrightarrow{F}) = \triangle\phi$.