MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Carlos Conca.
Auxiliar: Javier Santidrián & Patricio Yáñez A.

Auxiliar 1: Repaso de Curvas y Campos

Resumen

- [**Curva**]: Un conjunto Γ se llama curva si existe una función continua $\vec{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, llamada parametrización de la curva, tal que $\Gamma = \vec{r}([a,b])$. Además, la curva Γ puede ser:
  - Suave, si $\vec{r} \in \mathcal{C}^1$.
  - Regular, si $||\vec{r}'|| > 0$.
  - Simple, si $\vec{r}$ es inyectiva.
  - Cerrada, si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
- [**Parametrizaciones equivalentes**] Sea $\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $\vec{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de una curva Γ. $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son equivalentes si existe una función biyectiva $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que
$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\varphi(t)), \forall t \in [a,b]$$
En este caso φ se llamará reparametrización.
- [**Longitud de Curva**]: Se define la longitud de curva en el tiempo t como:
$$s(t) = \int_a^t ||\frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau}|| d\tau$$
- Sea Γ una curva regular y simple, con parametrización $\vec{r}(t)$ y parametrización natural $\sigma(s)$. Se tiene que:

	En función de s	**En función de t**
Velocidad $\vec{v}(t)$		$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$
Rapidez $v(t)$	$\frac{ds}{dt}$	$\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|$
Vector Tangente $\hat{T}$	$\frac{d\sigma(s)}{ds}$	$\frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|}$
Curvatura k	$\left\|\frac{d\hat{T}(s)}{ds}\right\|$	$\frac{\left\|\frac{d\hat{T}}{dt}\right\|}{\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|}$
Radio de Curvatura R	$\frac{1}{k(s)}$	$\frac{1}{k(t)}$
Vector Normal $\hat{N}$	$\frac{\frac{d\hat{T}(s)}{ds}}{\left\|\frac{d\hat{T}(s)}{ds}\right\|}$	$\frac{\frac{d\hat{T}(t)}{dt}}{\left\|\frac{d\hat{T}(t)}{dt}\right\|}$
Vector Binormal $\hat{B}$	$\hat{T}(s) \times \hat{N}(s)$	$\hat{T}(t) \times \hat{N}(t)$
Torción τ	$-\hat{N}(s) \cdot \frac{d\hat{B}(s)}{ds}$	$-\hat{N}(t) \cdot \left(\frac{\frac{d\hat{B}(t)}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|}\right)$

- **[Parametrización natural]** Para obtener la parametrización natural (o de longitud de curva). Es necesario obtener la función de longitud de arco ($s(t)$) y luego desde esta relación despejar t en función s, para finalmente encontrar:

$$\overrightarrow{\sigma}(s) = \overrightarrow{r}(t(s))$$

- [Observaciones] Cualquier otra parametrización regular conduce a la misma parametrización natural solo que puede variar el sentido (dependiendo del sentido de la parametrización). También se cumple que: $\|\frac{d\sigma}{ds}\|=1$

- [**Coordenadas Cilíndricas**]: La relación entre las coordenadas cartesianas y cilíndricas viene dada principalmente por:

$$T(\rho, \theta, k) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, k)$$

- [**Coordenadas Esféricas**]: La relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas viene dada principalmente por:

$$T(r, \theta, \phi) = (r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$$

Propuestos curvas en el espacio

A. Sea la parametrización $r(t) = \left(a\cos(t), a\sin(t), \frac{ht}{2\pi}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$. Determine si esta parametrización[1] es suave, regular, simple, cerrada y/o cerrada simple.

B. Encuentre alguna parametrización para las siguientes curvas

a) La parabola dada por $y = x^2, x \in [0, a]$ en sentido antihorario.

b) El segmento que une el punto $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ y el punto $\overrightarrow{q} = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$.

c) El triangulo cuyos vértices son $(0,0)$, $(0,1)$ y $(3,3)$.

d) La elipse dada por $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

e) La curva que se obtiene de intersectar un casquete esférico unitario y la superficie de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$.

[1] En estricto rigor la cualidad de ser suave, simple, regular,etc. Es de las curvas, sin embargo, usaremos estas propiedades para referirnos de igual forma a las parametrizaciones. Se ruega comprender la diferencia entre curva y parametrización.

C. [Recuerdo de Vietnam]

Considere la curva Γ parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \phi(u)sen(u)du \\ \int_0^t \phi(u)cos(u)du \\ \int_0^t \phi(u)tan(u)du \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2})$, donde $\phi(t) > 0$ es una función continua en $[0, \frac{\pi}{2})$

a) Demuestre que Γ es regular. Calcule $T(t), N(t)$ y la curvatura $\kappa(t)$ en términos de $\phi(t)$. Use estos resultados para determinar $\phi(t)$ de modo que κ sea constante e igual 1.

b) Calcule $B(t)$. Además, sabiendo que (no lo demuestre) $\dfrac{dB}{dt} = s(1+c^2)^{\frac{-3}{2}} \begin{pmatrix} (c^2 - s^2)(2 + c^2) \\ -2sc(2 + c^2) \\ c(2 + c^2) \end{pmatrix}$, donde $s = sen(t)$ y $c = cos(t)$, calcule la torsión τ de Γ en términos de $\phi(t)$ y determine $\phi(t)$ de modo que τ sea constante e igual a -1

D. Sea $r(s)$ una parametrización en longitud de arco de una curva Γ. Demuestre que

$$\frac{dr}{ds} \cdot \left(\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3} \right) = \tau\kappa^2$$

"La vida de un crítico es sencilla en muchos aspectos, arriesgamos poco, y tenemos poder sobre aquellos que ofrecen su trabajo y su servicio a nuestro juicio. Prosperamos con las críticas negativas – divertidas de escribir y de leer- pero la triste verdad que debemos afrontar, es que en el gran orden de las cosas, cualquier basura tiene más significado que lo que deja ver nuestra crítica. ... En el pasado, jamás oculté mi desdén por el famoso lema del chef Gusteau: ´Cualquiera puede cocinar´. Pero al fin me doy cuenta de lo que quiso decir en realidad: no cualquiera puede convertirse en un gran artista, pero un gran artista puede provenir de cualquier lado. Es difícil imaginar un origen más humilde que el del genio que ahora cocina en el restaurante Gusteau, y quien, en opinión de este crítico, es nada menos que el mejor chef de Francia. Pronto volveré a Gusteau… hambriento."

"La vida de un beauchefiano o beauchefiana es sencilla en muchos aspectos, arriesgamos muchas horas de sueño, y tenemos poder sobre aquellos que ofrecen su pauta y su servicio a nuestro juicio. Prosperamos con las matracas sin golazos – divertidas de escribir y de leer- pero la triste verdad que debemos afrontar, es que en el gran orden de las cosas, cualquier basura tiene más significado que nuestro desarrollo.. En el pasado, jamás oculté mi desdén por el famoso lema del crack Javier: ´Cualquiera puede matraquear´. Pero al fin me doy cuenta de lo que quiso decir en realidad: no cualquiera puede hacer la matraca sin golazos, pero un/una gran artista puede provenir de cualquier lado y juntos en este curso trabajaremos para lograrlo entre auxiliares, profesor y estudiantes. a por la matraca hasta salvar la compañía, ustedes pueden"

E. Sea la curva que se forma al intersectar:

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{y} \quad xtanh(z) = y$$

con $0 \leq z \leq 1$ y $x, y \geq 0$. Se pide:

a) Parametrizar la curva y calcular su longitud.

b) Encontrar su parametrización en longitud de arco.

c) Calcule el vector Tangente, Normal y Binormal.

F. El objetivo de esta pregunta es encontrar el plano osculador de un curva para esto necesita las siguientes definiciones:

Una de las formas de obtener un plano Π es encontrar su ecuación normal $< \overrightarrow{v} - \overrightarrow{p}, \overrightarrow{n} >$ donde $\overrightarrow{v} \in \Pi$ arbitrario, $\overrightarrow{p} \in \Pi$ fijo o conocido y $\overrightarrow{n}$ es un vector normal.

Dada la curva definida por:

$$\overrightarrow{r}(t) = (cos(t), sen(t), t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- **[Teorema de Fubini]**: Sean $R_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $R_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, $R = R_1 \times R_2$, y $f : R \longrightarrow R$ una función integrable, tal que las funciones

$$x \in R_1 \to \int_{R_2} f(x,y)dy \quad , \quad y \in R_2 \to \int_{R_1} f(x,y)dx$$

  están bien definidas y son integrables. Entonces se tiene la validez de las igualdades

$$\int_R f = \int_{R_1} (\int_{R_2} f(x,y)dy)dx = \int_{R_2} (\int_{R_1} f(x,y)dx)dy$$

- **[Teorema del Cambio de Variable]**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $T : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Sea D' una región abierta y acotada con $Adh(D') \subseteq \Omega$ y supongamos además que T es inyectiva en D', que la matriz $T'(u)$ es invertible para todo $u \in D'$ y que $D = T(D')$ es un abierto. Sea $f : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene entonces la validez de la igualdad

$$\int_D f(x)dx = \int_{D'} f(T(u)) \cdot |det(T'(u))|du$$

- **[Campos]**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío. Definimos:
  - **Campo Escalar** sobre Ω a toda función a valores reales, es decir, a toda función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - **Campo Vectorial** sobre Ω a toda función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Citado Cálculo diferencial e Integral Uchile y Cálculo en varias variables coordinado 2019.

P1. Las coordenadas de una partícula en el tiempo vienen dadas por:

$$\overrightarrow{r}(t) = (\sin t - t\cos t, \cos t + t\sin t, t^2)$$

Calcule $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$, k y R.

P2. Demuestre que una curva sin curvatura, corresponde a una recta.

P3. a) Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva Γ. Demuestre que el largo de Γ en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ es

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta$$

b) Demuestre que para el caso en que se cumpla $f'(\theta) = af(\theta)$, con a un número real, la curvatura de Γ en cualquier θ está dada por

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}}$$

P4. Dibuje las líneas de corriente/flujo de los siguientes campos vectoriales.

a) $\overrightarrow{F}(x,y) = (x,y)$

b) $\overrightarrow{F}(x,y) = (1, y^2 - y)$

c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\frac{-y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{-z}{x^2+y^2+z^2})$

d) $\overrightarrow{F}(r,\theta,\phi) = \frac{K}{r^2}\hat{r}$, para los casos $K < 0$ y $K > 0$.

P5. En esta pregunta se pide calcular $\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ y se sugiere utilizar el teorema de Fubini dos veces.

P6. La siguiente integral, llamada **Integral de Gauss** posee una variedad de aplicaciones, principalmente en la teoría de probabilidades, esta corresponde a la integración a lo largo de la recta real de la función gaussiana e^{-x^2}, posee un valor relativamente sencillo de calcular a lo largo de $\mathbb{R}$.
El objetivo de esta pregunta es calcular el valor de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

a) Calcule el determinante de la transformación de coordenadas cartesianas a polares, es decir, de $(x,y) = P(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

b) Utilizando *Fubini* logre la siguiente igualdad:

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = (\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx)^2$$

c) Utilizando lo encontrado en (a) llegue a que $I = \pi$.

d) Concluya y entregue el valor de la integral de Gauss.

Matraca1[2]: "Hoy comienzan las auxiliares de CAA muchacho"

[2]Matraca1 = Pato + Javier harán grandes matracas que en conjunto a ustedes lograremos entender