Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto

Auxiliar Extra Pauta

07 de Diciembre de 2022

P1.- a) Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega')$ donde $\Omega \cup \partial\Omega \subseteq \Omega'$ y $\partial\Omega$ es una superficie regular por trozos. Pruebe que

$$\iiint_\Omega (u\triangle u + |\nabla u|^2)dV = \iint_{\partial\Omega} u\partial_n u dS$$

Demostración:

Recordemos que el teorema de la divergencia dice que, para un campo $\vec{F} \in \mathcal{C}^1$, y un sólido con frontera $\partial\Omega$ clase $\mathcal{C}^1$ por trozos, se tiene que

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{F}d\vec{A} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \vec{F}dV$$

Ahora, como el campo escalar u es de clase $\mathcal{C}^2$, entonces consideremos el siguiente campo vectorial

$$\vec{F} = u\nabla u$$

Aplicando el teorema de la divergencia obtenemos que

$$\oiint_{\partial\Omega} u\nabla u d\vec{A} = \iiint_\Omega \nabla \cdot (u\nabla u)dV$$

recordando que $\nabla u d\vec{A} = \partial_n u dS$, se tiene que

$$\oiint_{\partial\Omega} u\partial_n u dS = \iiint_\Omega \nabla \cdot (u\nabla u)dV$$

Luego, aplicando la regla del producto para derivadas en n dimensiones

$$\oiint_{\partial\Omega} u\partial_n u dS = \iiint_\Omega \nabla \cdot (u\nabla u)dV = \iiint_\Omega \nabla u \cdot \nabla u + u\nabla \cdot \nabla u dV = \iiint_\Omega |\nabla u|^2 + u\triangle u dV$$

b) Considere el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (xz + e^{z^2}, z - z^2 - 2, z^2 + y)$$

Calcule el flujo que atraviesa la superficie del sólido Ω delimitado por

$$\partial\Omega = \{x^2 + y^2 - 1 = 0, 0 \leq z \leq 2 - y\} \cup \{z = 2 - y, x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Cuánto es el flujo que atraviesa el manto y la tapa?

Demostración:

En consideración de que las superficies forman un cilindro cortado, y generan un sólido con frontera regular, es posible utilizar el teorema de la divergencia para calcular el flujo que atraviesa esta superficie cerrada al calcular la integral de volumen de la divergencia.

Calculemos primero la divergencia del campo que nos presentan

$$\nabla \cdot \vec{F} = \partial_x(xz + e^{z^{z^2}}) + \partial_y(z - z^2 - 2) + \partial_z(z^2 + y) = z + 0 + 2z = 3z$$

Ahora, los límites de integración son importantes. Utilizaremos la descripción en coordenadas cilíndricas por ser un cilindro truncado

$$x = \rho cos(\theta)$$

$$y = \rho sin(\theta)$$

Luego, se tiene que

$$\rho \in [0, 1]$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$z \in [0, 2 - \rho sin(\theta)]$$

Luego, la integral de flujo de superficie puede ser calculada como

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{F} d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-\rho\sin(\theta)} 3z dz \rho d\theta d\rho = \frac{3}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 - \rho sin(\theta))^2 \rho d\theta d\rho$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho(4 - 4\rho sin(\theta) + \rho^2 sin(\theta)) d\theta d\rho$$

$$= \frac{12}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\theta d\rho - \frac{12}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 sin(\theta) d\theta d\rho + \frac{3}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 sin(\theta)^2 d\theta d\rho$$

$$= \frac{12}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\theta d\rho + \frac{3}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 (1 - cos(2\theta)) d\theta d\rho = 12\pi \int_0^1 \rho d\rho + \frac{3\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 d\rho$$

$$= 6\pi + \frac{3\pi}{8} = \frac{51\pi}{8}$$

Calculemos el flujo que atraviesa el fondo para poder utilizar completamente el teorema de la divergencia y obtener los flujos que atraviesan las otras 2 superficies

$$\iint_{\{z=0,x^2+y^2\leq 1\}} \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \vec{F}\cdot\hat{z}\rho d\theta d\rho = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (0^2+\rho sin(\theta))\rho d\theta d\rho = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 sin(\theta) d\theta d\rho = 0$$

Luego por el teorema de la divergencia

$$\iint_{\{x^2+y^2-1=0,0\leq z\leq 2-y\}\cup\{z=2-y,x^2+y^2\leq 1\}} \vec{F}\cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{F}dV - \iint_{\{z=0,x^2+y^2\leq 1\}} \vec{F}\cdot d\vec{A} = \frac{51\pi}{8}$$

c) Considere las superficies dadas por

$$\Sigma_1 = \{x^2+y^2+(z-2)^2-9=0, z>2\}$$

$$\Sigma_2 = \{x^2+y^2-9=0, z\in[1,2]\}$$

Calcule la siguiente integral de flujo

$$\iint_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} (2yz\hat{y} - z^2\hat{z})\cdot\hat{n}dS$$

Demostración:

Consideremos el siguiente campo vectorial

$$\vec{F} = yz^2\hat{x}$$

Calculemos su rotor

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2yz\hat{y} - z^2\hat{z}$$

Que es el campo sobre el cual nos piden calcular la integral de flujo. La superficie $\Sigma_1\cup\Sigma_2$ es una superficie regular pro trozos con frontera regular por tramos. Luego es posible aplicar el teorema del Rotor sobre este campo

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \nabla\times\vec{F}d\vec{A}$$

Luego sólo nos resta calcular la circulación del campo $\vec{F}$ en torno a la frontera de $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ repetando la normal exterior. Parametricemos en cilíndricas esta curva simple

$$\rho = 3$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$z = 1$$

Luego

$$\vec{r} = (3cos(\theta), 3sin(\theta), 1)$$

$$d\vec{r} = (-3sin(\theta), 3cos(\theta), 0)d\theta$$

Luego, por el teorema del Rotor

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{F} d\vec{A} = \oint_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (1^2 3sin(\theta), 0, 0) \cdot (-3sin(\theta), 3cos(\theta), 0)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -9sin(\theta)^2 d\theta = -\frac{9}{2}\int_0^{2\pi} 1 - cos(2\theta)d\theta = -\frac{9}{2}[\theta - sin(2\theta)/2]|_0^{2\pi} = -9\pi$$

P2.- a) Calcule la integral

$$\oint_{|z|=R} \frac{e^z}{z(1-e^{-z})}dz$$

para $R = \pi$ y $R = 3\pi$

Demostración:

Salta a la vista que esta función tiene problemas en $z = 2ik\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Veamos el orden de los primeros 2 polos que son encerrados por la curva cerrada simple. Veamos que $z = 0$ es polo de orden 2 (esto pensando en que $(1 - e^{-z})$ se seguirá anulando si suponemos que es de orden 1)

$$lim_{z \longrightarrow 0} \frac{(z-0)^2 e^z}{z(1-e^{-z})} = lim_{z \longrightarrow 0} \frac{ze^z}{(1-e^{-z})}$$

usando L'Hopital

$$= lim_{z \longrightarrow 0} \frac{e^z + ze^z}{e^{-z}} = 1 \neq 0$$

Ahora veamos que $z = \pm 2i\pi$ es polo simple

$$lim_{z\longrightarrow \pm 2i\pi}\frac{(z\mp 2i\pi)e^z}{z(1-e^{-z})}$$

nuevamente usando L'Hopital, se tiene que

$$= lim_{z\longrightarrow \pm 2i\pi}\frac{e^z+ze^z\mp 2i\pi e^z}{1-e^{-z}+ze^{-z}} = \frac{e^{\pm 2i\pi}\pm 2i\pi e^{\pm 2i\pi}\mp 2i\pi e^{\pm 2i\pi}}{1-e^{\mp 2i\pi}+\pm 2i\pi e^{\mp 2i\pi}} = \frac{1\pm 2i\pi \mp 2i\pi}{1-1+\pm 2i\pi} = \mp\frac{i}{2\pi}\neq 0$$

Luego, ahora podemos calcular mediante residuos

Para $R=\pi$

$$\oint_{|z|=R}\frac{e^z}{z(1-e^{-z})}dz = 2i\pi Res(f(z),0) = 2i\pi \quad lim_{z\longrightarrow 0}\frac{d}{dz}\frac{(z-0)^2e^z}{z(1-e^{-z})} = 2i\pi \quad lim_{z\longrightarrow 0}\frac{d}{dz}\frac{ze^z}{(1-e^{-z})}$$

$$= 2i\pi \quad lim_{z\longrightarrow 0}\frac{(e^z+ze^z)(1-e^{-z})-ze^{-z}e^z}{(1-e^{-z})^2} = 2i\pi \quad lim_{z\longrightarrow 0}\frac{e^z-2z+ze^z-1}{(1-e^{-z})^2}$$

usando L'Hopital

$$= 2i\pi \quad lim_{z\longrightarrow 0}\frac{2e^z-2+ze^z}{2(1-e^{-z})e^{-z}}$$

y nuevamente L'Hopital

$$= 2i\pi \quad lim_{z\longrightarrow 0}\frac{3e^z+ze^z}{-2e^{-z}+4e^{-2z}} = 2i\pi \quad \frac{3}{2} = 3i\pi$$

Ahora, para $R=3\pi$, debemos agregar los otros 2 residuos de los polos simples $z=\pm 2i\pi$. Luego se tiene que

$$Res(f(z),2i\pi) = lim_{z\longrightarrow 2i\pi}(z-2i\pi)\frac{e^z}{z(1-e^{-z})} = -\frac{i}{2\pi}$$

$$Res(f(z),-2i\pi) = lim_{z\longrightarrow -2i\pi}(z+2i\pi)\frac{e^z}{z(1-e^{-z})} = \frac{i}{2\pi}$$

Luego, al sumar ambos residuos, la integral no cambia

$$\oint_{|z|=R}\frac{e^z}{z(1-e^{-z})}dz = 3i\pi$$

b) Calcular

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\frac{1}{2}cos(2\theta)}$$

Demostración

Esto tiene la forma de ser una integral en un circulo unitario, por lo tanto hagamos el siguiente cambio de variable

$$z = e^{i\theta}$$

por lo tanto

$$dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$$

$$cos(2\theta) = \frac{z^2 + z^{-2}}{2}$$

Luego la integral anterior puede ser reescrita como

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \frac{1}{2}cos(2\theta)} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 + \frac{z^2+z^{-2}}{4}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{z}{z^2 + \frac{z^4+1}{4}} dz = \frac{4}{i}\oint_{|z|=1} \frac{z}{4z^2 + z^4 + 1} dz$$

Veamos cuales son los polos de esa función, y cuales de estos están dentro de la curva cerrada smple

$$z^2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

de estos, sólo uno de los polos estaá encerrado por la curva, por lo tanto los polos simples encerrados serán

$$z = \pm i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Ahora, reescribamos el denominador de manera astuta para que sea más fácil el cálculo de residuos

$$4z^2 + z^4 + 1 = (z^2 - (-2 - \sqrt{3}))(z - i\sqrt{2 - \sqrt{3}})(z + i\sqrt{2 - \sqrt{3}})$$

Ahora calculamos los residuos correspondientes

$$Res(f(z), i\sqrt{2 - \sqrt{3}}) = lim_{z \longrightarrow i\sqrt{2-\sqrt{3}}}(z - i\sqrt{2 - \sqrt{3}})\frac{z}{(z^2 + 2 + \sqrt{3})(z - i\sqrt{2 - \sqrt{3}})(z + i\sqrt{2 - \sqrt{3}})}$$

$$= lim_{z \longrightarrow i\sqrt{2-\sqrt{3}}} \frac{z}{(z^2 + 2 + \sqrt{3})(z + i\sqrt{2 - \sqrt{3}})} = \frac{i\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{(\sqrt{3} - 2 + 2 + \sqrt{3})(2i\sqrt{2 - \sqrt{3}})}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{3}-2}}{4\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}-2}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

Ahora el otro residuo

$$Res(f(z), -i\sqrt{2-\sqrt{3}}) = lim_{z\longrightarrow -i\sqrt{2-\sqrt{3}}}(z+i\sqrt{2-\sqrt{3}})\frac{z}{(z^2+2+\sqrt{3})(z-i\sqrt{2-\sqrt{3}})(z+i\sqrt{2-\sqrt{3}})}$$

$$= lim_{z\longrightarrow -i\sqrt{2-\sqrt{3}}}\frac{z}{(z^2+2+\sqrt{3})(z-i\sqrt{2-\sqrt{3}})} = \frac{-i\sqrt{2-\sqrt{3}}}{(\sqrt{3}-2+2+\sqrt{3})(-2i\sqrt{2-\sqrt{3}})}$$

$$= \frac{-\sqrt{\sqrt{3}-2}}{-4\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}-2}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

Luego la integral original puede ser calculada como

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\frac{1}{2}cos(2\theta)} = 2i\pi\frac{4}{i}[Res(f(z), i\sqrt{2-\sqrt{3}})+Res(f(z), -i\sqrt{2-\sqrt{3}})] = 2i\pi\frac{4}{i}\frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

c) Demuestre mediante la fórmula de residuos la siguiente integral

$$\int_0^{\infty}\frac{t^m}{t^n+1}dt = \frac{\pi}{nsin(\frac{\pi(m+1)}{n})}$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n-m>2$

Demostración:

Consideremos el siguiente recorrido en el plano complejo

$$\Gamma_1 = \{z = t, t \in [0, R]\}$$

$$\Gamma_2 = \{z = Re^{it}, t \in [0, \frac{2\pi}{n}]\}$$

$$\Gamma_3 = \{z = te^{i\frac{2\pi}{n}}, t \in [R, 0]\}$$

y la extensión natural compleja de l afunción que se desea integrar

$$f(z) = \frac{z^m}{z^n+1}$$

Vemos que en el interior de esta curva simple cerrada regular por trozos hay un solo polo simple encerrado en

$$z = e^{i\frac{\pi}{n}}$$

Veamos que es un polo simple

$$lim_{z\longrightarrow e^{i\frac{\pi}{n}}}(z - e^{i\frac{\pi}{n}})\frac{z^m}{z^n+1}$$

donde podemos usar L'Hopital

$$= lim_{z\longrightarrow e^{i\frac{\pi}{n}}}\frac{(m+1)z^m - me^{i\frac{\pi}{n}}z^{m-1}}{nz^{n-1}} = \frac{(m+1)e^{i\frac{m\pi}{n}} - me^{i\frac{\pi}{n}}e^{i\frac{(m-1)\pi}{n}}}{ne^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}} = \frac{(m+1)e^{i\frac{m\pi}{n}} - me^{i\frac{m\pi}{n}}}{ne^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}}$$

$$= \frac{e^{i\frac{m\pi}{n}}}{ne^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}} = e^{i\frac{(m+1)\pi}{n}}\frac{e^{ni\pi}}{n} = -\frac{e^{i\frac{(m+1)\pi}{n}}}{n}$$

Luego es un polo simple y ya tenemos el resultado del residuo. Ahora veamos comoquedan las integrales de línea

$$\int_0^R \frac{t^m}{t^n+1}dt + \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R^m e^{imt}}{R^n e^{int}+1}Re^{it}idt + \int_R^0 \frac{t^m e^{\frac{2im\pi}{n}}}{t^n e^{\frac{2in\pi}{n}}+1}e^{\frac{2i\pi}{n}}dt = 2i\pi Res(f(z), e^{i\frac{\pi}{n}})$$

Acotemos la 2da integral

$$0 \leq |\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R^m e^{imt}}{R^n e^{int}+1}Re^{it}idt| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R^{m+1}}{|R^n e^{int}+1|}dt \leq \frac{2\pi}{n}R^{m-n+1} \leq \frac{2\pi}{n}R^{-1}$$

Luego si $R \longrightarrow \infty$ esta integral converge a 0. Tomando límite el problema original queda como

$$\int_0^\infty \frac{t^m}{t^n+1}dt - e^{\frac{2i(m+1)\pi}{n}}\int_0^\infty \frac{t^m}{t^n+1}dt = 2i\pi Res(f(z), e^{i\frac{\pi}{n}}) = -2i\pi\frac{e^{i\frac{(m+1)\pi}{n}}}{n}$$

$$(1 - e^{\frac{2i(m+1)\pi}{n}})\int_0^\infty \frac{t^m}{t^n+1}dt = -2i\pi\frac{e^{i\frac{(m+1)\pi}{n}}}{n}$$

$$\frac{(e^{-i\frac{(m+1)\pi}{n}} - e^{i\frac{(m+1)\pi}{n}})}{2i}\int_0^\infty \frac{t^m}{t^n+1}dt = -\frac{\pi}{n}$$

$$\int_0^\infty \frac{t^m}{t^n+1}dt = \frac{\pi}{nsin(\frac{(m+1)\pi}{n})}$$

P3.- Considere el dominio $\Omega = [0, \pi] \times \mathbb{R}_+$ y el siguiente sistema

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u + sin(x), (x,t) \in \Omega \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 1 - x, \forall x \in [0, \pi] \end{cases}$$

que corresponde a una distribución de temperatura dada por calefactores puestos de forma periódica. Resuelva el sistema mediante separación de variables.

Demostración:

Primero realizemos el siguiente cambio de variable

$$y(x,t) = u(x,t) - sin(x)$$

el sistema queda descrito como

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} y, (x,t) \in \Omega \\ y(0,t) = y(\pi, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ y(x,0) = 1 - x - sin(x), \forall x \in [0, L] \end{cases}$$

Realizando la separación de variables en busca de soluciones no identicamente nulas $y(x,t) = T(t)X(x)$, se llega a lo siguiente

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Descartamos los otros posibles signos de la constante debido a las condiciones de borde tipo Dirichlet nulas. Por lo tanto las soluciones generales para $X(x)$ quedan como

$$X(x) = Asin(\lambda x) + Bcos(\lambda x)$$

De las condiciones de borde, se obtiene que

$$B = 0$$

$$\lambda = k, k \in \mathbb{N}$$

Ahora, la solución para $T(t)$ queda dada por

$$T(t) = Ae^{-k^2 t}$$

Luego la solución genérica queda dada por

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2 t} sin(kx)$$

De las condiciones iniciales podemos obtener que

$$y(x,0) = 1 - x - sin(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k sin(kx)$$

Saquemos los coeficientes A_k mediante la descomposición en series de Fourier. Dado que $-sin(x)$ ya es una descomposición de Fourier en si misma, sólo falta realizar una extensión impar de $1-x$ para encontrar los coeficientes de Fourier que esta genera, dada la linealidad de las series (que es heredada de la linealidad de las integrales)

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}[-\frac{(-1)^k-1}{k} - \int_0^{\pi} xsin(kx)dx]$$

$$= \frac{2}{\pi}[-\frac{(-1)^k-1}{k} + \frac{\pi(-1)^k}{k} - \int_0^{\pi}\frac{cos(kx)}{k}dx] = \frac{2}{\pi}[-\frac{(-1)^k-1}{k} + \frac{\pi(-1)^k}{k} - \frac{sin(kx)}{k^2}|_0^{\pi}]$$

$$= \frac{2}{\pi}[-\frac{(-1)^k-1}{k} + \frac{\pi(-1)^k}{k}]$$

Luego podemos reordenar esto como

$$A_{2l} = \frac{2}{\pi}[-\frac{(-1)^{2l}-1}{k} + \frac{\pi(-1)^{2l}}{k}] = \frac{2}{k}$$

$$A_1 = -1 + \frac{2}{\pi}[-\frac{(-1)^1-1}{1} + \frac{\pi(-1)^1}{1}] = -\frac{2}{\pi}[2-\pi]$$

$$A_{2l+1} = \frac{2}{\pi}[-\frac{(-1)^{2l+1}-1}{2l+1} + \frac{\pi(-1)^{2l+1}}{2l+1}] = \frac{2}{\pi}[\frac{2}{2l+1} - \frac{\pi}{2l+1}]$$

Luego la solución al problema original queda como

$$u(x,t) = sin(x) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2 t} sin(kx)$$

con los coeficientes antes calculados

b) Calcule las transformada de Fourier de las siguiente función

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{H(k-1/k) - H(k+1/k)}{k^2+1}$$

Demostración:

Vemos que es una función de escalones decrecietes, y que $\forall x \in \mathbb{R}$ la serie converge absolutamente, luego su transformada queda determinada por la suma de cada una de las transformadas de las funciones que componen la serie, debido a la linealidad de la transformada de Fourier

Denominemos

$$f_k(x) = \frac{H(k-1/k) - H(k+1/k)}{k^2+1}$$

Calculemos la transformada de cada una de estas funciones

$$F_k(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(k^2+1)} \int_{k-1/k}^{k+1/k} e^{-isx} dx$$

$$= \frac{1}{-is\sqrt{2\pi}(k^2+1)} e^{-isx}\Big|_{k-1/k}^{k+1/k} = \frac{1}{-is\sqrt{2\pi}(k^2+1)} (e^{-isk-is/k} - e^{-isk+is/k})$$

$$= \frac{2e^{-isk}}{s\sqrt{2\pi}(k^2+1)} sin(s/k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2+1} \frac{sin(s/k)}{s}$$

Luego por linealidad y absoluta convergencia, se tiene que

$$F(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{k^2+1} \frac{sin(s/k)}{s}$$

Para este tipo de señales, indica que en la transformada de Fourier, que representa un espectro de frecuencias, las señales con k mayores son cada vez menos importantes, dado que en su transformada estas se ven atenuadas, y por tanto los k mḿas pequeños son los que tienen mayor incidencia en esta función final.