Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto

Auxiliar 15 Pauta

30 de Noviembre de 2022

P1.- Demuestre lo siguiente, para $a > 0$

$$\mathcal{F}(\frac{a^3 - ax^2}{(a^2+x^2)^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a|s|e^{-a|s|}$$

Demostración:

Dado que calcular la transformada desde el lado izquierdo se ve dificil, utilizaremos el teorema de transformadas de Fourier y veremos que la antitransformada del lado derecho coincide con lo que queremos transformar al lado izquierdo.

$$\mathcal{F}^{-1}(\sqrt{\frac{\pi}{2}} a|s|e^{-a|s|})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} a|s|e^{-a|s|} e^{isx} ds = \frac{a}{2}[-\int_0^{\infty} se^{as}e^{isx}ds + \int_{-\infty}^{0} se^{-as}e^{isx}ds]$$

$$= \frac{a}{2}[-\int_0^{\infty} se^{(ix+a)s}ds + \int_{-\infty}^{0} se^{(ix-a)s}ds]$$

$$= \frac{a}{2}[-\frac{se^{(ix+a)s}}{(ix+a)}|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{(ix+a)s}}{(ix+a)}ds + \frac{se^{(ix-a)s}}{(ix-a)}|_{0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{(ix-a)s}}{(ix-a)}ds]$$

donde los límites a $-\infty$ y ∞ van a 0 dado que la parte real de la exponencial tiene el signo correcto en cada uno de los límites para converger

$$= \frac{a}{2}[\frac{e^{(ix+a)s}}{(ix+a)^2}|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{(ix-a)s}}{(ix-a)^2}|_{0}^{\infty}] = \frac{a}{2}[\frac{1}{(ix+a)^2} + \frac{1}{(ix-a)^2}] = \frac{a}{2}[\frac{(ix-a)^2 + (ix+a)^2}{(ix+a)^2(ix-a)^2}]$$

$$= \frac{a}{2}[\frac{-x^2 - 2ixa + a^2 + -x^2 + 2ixa + a^2}{(ix+a)^2(ix-a)^2}] = \frac{a}{2}[\frac{-2x^2 + 2a^2}{(-x^2-a^2)^2}] = \frac{a^3 - ax^2}{(x^2+a^2)^2}$$

Luego por el teorema de la antitransformada, se tiene lo pedido.

P2.- Encuentre la transformada de Fourier de

$$f(x) = e^{-|x|} sin(2x)$$

Demostración:

Usemos la forma integral de la transformada

$$\mathcal{F}(f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}sin(2x)e^{-isx}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\int_{-\infty}^{0} e^{x}sin(2x)e^{-isx}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}sin(2x)e^{-isx}dx]$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}[\int_{-\infty}^{0} e^{x}(e^{2ix}-e^{-2ix})e^{-isx}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}(e^{2ix}-e^{-2ix})e^{-isx}dx]$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}[\int_{-\infty}^{0} e^{(1+2i-is)x}dx - \int_{-\infty}^{0} e^{(1-2i-is)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{(-1+2i-is)x}dx - \int_{0}^{\infty} e^{(-1-2i-is)x}dx]$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}[\frac{e^{(1+2i-is)x}}{(1+2i-is)}|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{(1-2i-is)x}}{(1-2i-is)}|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{(-1+2i-is)x}}{(-1+2i-is)}|_{0}^{\infty} - \frac{e^{(-1-2i-is)x}}{(-1-2i-is)}|_{0}^{\infty}]$$

Los limites a $-\infty$ y ∞ vana 0 dado que las partes reales de las exponenciales correspondientes poseen el signo correcto para que estas converjan.

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}[\frac{1}{(1+2i-is)} - \frac{1}{(1-2i-is)} - \frac{1}{(-1+2i-is)} + \frac{1}{(-1-2i-is)}]$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}[\frac{(1-2i-is)-(1+2i-is)}{(1+2i-is)(1-2i-is)} - \frac{(-1-2i-is)-(-1+2i-is)}{(-1-2i-is)(-1+2i-is)}]$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}[\frac{-4i}{1-2i-is+2i+4+2s-is-2s-s^2} - \frac{-4i}{1-2i+is+2i+4-2s+is+2s-s^2}]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}[\frac{1}{1-2is+4-s^2} - \frac{1}{1+4+2is-s^2}]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}[\frac{1}{(1-is)^2+4} - \frac{1}{(1+is)^2+4}]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}[\frac{(1+is)^2+4-(1-is)^2-4}{[(1-is)^2+4][(1+is)^2+4]}]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}[\frac{4is}{[(1-is)^2+4][(1+is)^2+4]}]$$

P3.- Considere el dominio $\Omega = [0, L] \times \mathbb{R}_+$ y el siguiente sistema

$$\begin{cases} \partial_{xx}u + u = \partial_t u, (x,t) \in \Omega \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = f(x), \forall x \in [0,L] \end{cases}$$

que corresponde a la densidad de bacterias que se acumulan a lo largo del tiempo en un intervalo. Resuelvalo mediante separación de variables.

Demostración:

Suponemos soluciones no identicamente nulas de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, la EDP queda como

$$\frac{X''}{X} + 1 = \frac{T'}{T} = \lambda \text{ constante}$$

Resolvemos la EDO para x. Acá veremos en detalle porqué por las condiciones de borde las soluciones deben ser de la forma senos y cosenos

$\underline{1 - \lambda = 0}$

La EDO para x queda definida como

$$X'' = 0$$

por lo tanto la solución general será

$$X(x) = Ax + B$$

la cual al cumplir las condiciones de borde, se llega a que $A = 0$ y $B = 0$, obteniéndose una solución nula, contradiciendo la hipótesis inicial

$\underline{1 - \lambda < 0}$

Podemos cambiar variable de la siguiente manera $-\alpha^2 = 1 - \lambda$, por lo tanto la EDO queda como

$$X'' - \alpha^2 X = 0$$

donde las soluciones son de la forma

$$X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

Para la primera condición de borde, se tiene que $A + B = 0$, pero para la segunda se tiene que $e^{\alpha L} = e^{-\alpha L}$, pero esto no puede ocurrir si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, por lo tanto la única opción que queda es que

$\underline{1 - \lambda > 0}$

Luego la EDO puede ser reescrita con el cambio de variable $\alpha^2 = 1 - \lambda$ como

$$X^{''} + \alpha^2 X = 0$$

donde las soluciones son de la forma

$$X(x) = Acos(\alpha x) + Bsin(\alpha x)$$

De las condiciones de borde, se tieneque $A = 0$ y que $\alpha L = k\pi$.

Ahora, resolvemos la EDO para la variable t

$$T^{'} = \lambda T = (1 - \alpha^2)T = (1 - (\frac{k\pi}{L})^2)T$$

por lo tanto

$$T(t) = Ae^{(1-(\frac{k\pi}{L})^2)t}$$

Luego la solución general puede ser descrita por

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{(1-(\frac{k\pi}{L})^2)t} sin((\frac{k\pi}{L})x)$$

Ahora usamos las condiciones iniciales para obtener los coeficientes B_k. Dado que

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k sin((\frac{k\pi}{L})x)$$

Significa que necesitamos una descomposición de Fourier en senos de la función $f(x)$, por lo cual usaremos su extensión impar

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in [0, L] \\ -f(x), x \in [-L, 0] \end{cases}$$

por lo que

$$B_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \bar{f}(x) sin(kx)dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) sin(kx)dx$$

Luego la solución general queda dada por

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) sin(kx)dx] e^{(1-(\frac{k\pi}{L})^2)t} sin((\frac{k\pi}{L})x)$$

P4.- Considere el siguiente dominio $\Omega = [0,\pi] \times \mathbb{R}_+$ en donde está definida la siguiente EDP

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u - 6\partial_x u, \forall (x,t) \in \Omega \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = e^{3x}x, \forall x \in [0,\pi] \end{cases}$$

El anterior sistema corresponde a un sistema difusivo que posee una asimetría. Resuelva usando el método de separación de variables.

Demostración:

Consideremos soluciones no identicamente nulas de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Luego la EDP puede ser reescrita como

$$\frac{T^{'}}{T} = \frac{X^{''}}{X} - 6\frac{X^{'}}{X} = \lambda \text{ constante}$$

Resolvendo la EDO para x se tiene que

$$X^{''} - 6X^{'} - \lambda X = 0$$

puede ser resulta mediante polinomio característico, por lo tanto sus soluciones serán de la forma

$$X(x) = Ae^{l_+ x} + Be^{l_- x}$$

donde

$$l_\pm = \frac{6 \pm \sqrt{36+\lambda}}{2} = 3 \pm \sqrt{9+\lambda}$$

Ahora las condiciones de borde dirán los valores que puede tomar λ

$$u(0,t) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0 = A + B$$

$$u(\pi,t) = 0 \Longrightarrow X(\pi) = 0 = Ae^{l_+\pi} + Be^{l_-\pi}$$

Usando ambas condiciones, se llega a que

$$0 = A(e^{l_+\pi} - e^{l_-\pi})$$

por lo tanto

$$e^{l_+\pi} = e^{l_-\pi}$$

$$e^{2\sqrt{9+\lambda}\pi} = 1 = e^{2i\pi k}, k \in \mathbb{N}$$

por lo tanto

$$9 + \lambda = -k^2$$

Por tanto la solución para la EDO de x será

$$X(x) = Ae^{3x}(e^{ik} - e^{-ik}) = \bar{A}e^{3x}sin(kx)$$

Luego resolvemos la EDO para t

$$T^{'} = \lambda T = (-9 - k^2)T$$

$$T(t) = Be^{-(9+k^2)t}$$

Luego la solución general para la EDP será dada por

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-(9+k^2)t} e^{3x} sin(kx)$$

Ahora utlicemos la condició inicial para obtener los coeficientes B_k

$$u(x,0) = e^{3x}x = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{3x} sin(kx) = e^{3x} \sum_{k=1}^{\infty} B_k sin(kx)$$

Luego

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} B_k sin(kx)$$

por lo tanto necesitamos descomponer la función $f(x) = x$ en una serie de Fourier de senos. Dado que $f(x)$ es una función impar intrinsecamente, calcularemos los coeficientes de Fourier de esta función en base a su extensión impar natura

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}[-\frac{xcos(kx)}{k}|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi} cos(kx)dx]$$

$$= \frac{2}{\pi}[-\frac{\pi(-1)^k}{k} + \frac{1}{k^2} sin(kx)|_0^{\pi}] = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

Luego la solución general es dada por

$$u(x,t) = e^{3x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} e^{-(9+k^2)t} sin(kx)$$