

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto



Auxiliar 13 Pauta

16 de Noviembre de 2022

P1.- Usando la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

utilizar la propiedad de convergencia de las series de Fourier para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Demostración:

Primero vemos como son los coeficientes de Fourier de esta función $f(x)$ definida en un intervalo de largo L , es tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$$

esto hace que tanto $\cos(\frac{n\pi x}{L})$ como $\sin(\frac{n\pi x}{L})$ son un conjunto ortonormal, por lo tanto sus coeficientes pueden ser calculados de la siguiente manera

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx$$

notese que lo anterior quiere decir que la función tendrá una extensión periódica de período L . En el caso particular de la función que nos proponen, el largo del intervalo es 2π , por lo tanto los coeficientes de Fourier quedan determinados como

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^\pi = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \Big|_0^\pi \right] = -\frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

Luego la función $f(x)$ presentada al inicio, puede ser descrita como serie de Fourier en todo punto de continuidad de la siguiente manera

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(nx) + \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{(-1)^m}{m} \sin(mx)$$

Pero dado que los coeficientes de Fourier que acompañan al coseno son 0 salvo cuando n es impar, esta puede ser descrita como

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{n} \sin(nx)$$

Ahora, como $x = 0$ es un punto de continuidad de la función, se tiene que

$$f(x=0) = 0 = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2}$$

Luego, reordenando los términos

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

P2.- a) Demuestre que si definimos

$$f : (0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cos(x)$$

entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(2nx)$$

b) Use los teoremas de convergencia de series de Fourier para demostrar que

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{3}{6^2 - 1} + \frac{5}{10^2 - 1} \dots$$

Demostración:

El centro de este problema, es entender que las series de Fourier posee paridad intrínseca. Si miramos la función $\cos(x)$, vemos que su descomposición en serie de Fourier sería solo $\cos(1x)$, donde a_n son todos 0 salvo $n = 1$, y $b_n = 0$ siempre. Ahora como queremos descomponer la función $\cos(x)$ en $\sin(nx)$, extenderemos de manera impar esta función.

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \cos(x), & x \in [0, \pi] \\ -\cos(x), & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Luego los coeficientes pueden calcularse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(nx - x) + \sin(nx + x)] dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos((n-1)x)}{n-1} + \frac{\cos((n+1)x)}{n+1} \right] \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1} \right] \end{aligned}$$

los coeficientes anteriores son 0 si n es impar, por lo cual nos reduciremos solo a los coeficientes pares

$$b_{2n} = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{-2}{2n-1} + \frac{-2}{2n+1} \right] = \frac{2}{\pi} \frac{2n+1+2n-1}{(2n)^2 - 1} = \frac{2}{\pi} \frac{4n}{(2n)^2 - 1}$$

Luego la función propuesta, en los puntos de continuidad (i.e. $\forall x \in (0, \pi)$) puede ser descrita como

$$\cos(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{n}{(2n)^2 - 1} \sin(2nx)$$

b)

Evalutando en el punto de discontinuidad $x = \frac{\pi}{4}$, se tiene que

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{n}{(2n)^2 - 1} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

donde reordenando, se tiene que

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n)^2 - 1} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

donde los términos del lado derecho son no nulos si n es impar. Luego

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{(2(2l+1))^2 - 1} \sin\left(\frac{2l\pi + \pi}{2}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{(2(2l+1))^2 - 1} (-1)^l = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{3}{6^2 - 1} + \frac{5}{10^2 - 1} \dots$$

P3.- Calcule las transformadas de Fourier de las siguientes funciones

a)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} k, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

En lo que sigue, identificaremos la transformada de Fourier de la función constante de la siguiente manera

$$\hat{L} = 2L\pi\delta(s)$$

Demostración:

a)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(is+1)x} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(is+1)x}}{i(s+1)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(is+1)} \end{aligned}$$

donde el primer límite converge a 0 dado que la exponencial posee una parte real negativa.

b)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a g(x) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a k e^{-isx} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} k \frac{e^{-isx}}{is} \Big|_{-a}^a \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} k \frac{e^{-isa} - e^{isa}}{is} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} k \frac{2\sin(as)}{s} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{\sin(as)}{s} \end{aligned}$$

P4.- a) Usando la definición de transformada de Fourier demuestre la identidad de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(\bar{y})dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\bar{\hat{g}}(s)ds$$

b) Con lo anterior, demuestre la identidad de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$$

Demostración:

a) Partamos del lado derecho y leguemos al lado izquierdo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\bar{\hat{g}}(s)ds &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-isy}dy \right]} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx} \bar{g}(y)e^{isy} dx dy ds \end{aligned}$$

Ahora como f, g son funciones que supondremos decaen lo suficientemente rápido, podemos usar Fubini

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x-y)} ds \right] dx dy$$

donde podemos reconocer la transformada de Fourier de la función constante

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(y) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x-y)} ds \right] dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(y) 2\pi \delta(x-y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-y) dx \right] dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\bar{g}(y) dy \end{aligned}$$

b) Ahora, para obtener la identidad de Parseval, basta tomar $g(x) = f(x)$, llegando a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(\bar{y})dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\bar{\hat{f}}(s)ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$$