

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto



Auxiliar 15 Pauta

30 de Noviembre de 2022

P1.- Demuestre lo siguiente, para $a > 0$

$$\mathcal{F}\left(\frac{a^3 - ax^2}{(a^2 + x^2)^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a |s| e^{-a|s|}$$

Demostración:

Dado que calcular la transformada desde el lado izquierdo se ve difícil, utilizaremos el teorema de transformadas de Fourier y veremos que la antitransformada del lado derecho coincide con lo que queremos transformar al lado izquierdo.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} a |s| e^{-a|s|}\right)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} a |s| e^{-a|s|} e^{isx} ds = \frac{a}{2} \left[- \int_0^{\infty} s e^{as} e^{isx} ds + \int_{-\infty}^0 s e^{-as} e^{isx} ds \right] \\ &= \frac{a}{2} \left[- \int_0^{\infty} s e^{(ix+a)s} ds + \int_{-\infty}^0 s e^{(ix-a)s} ds \right] \\ &= \frac{a}{2} \left[- \frac{s e^{(ix+a)s}}{(ix+a)} \Big|_0^{\infty} + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{(ix+a)s}}{(ix+a)} ds + \frac{s e^{(ix-a)s}}{(ix-a)} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{(ix-a)s}}{(ix-a)} ds \right] \end{aligned}$$

donde los límites a $-\infty$ y ∞ van a 0 dado que la parte real de la exponencial tiene el signo correcto en cada uno de los límites para converger

$$\begin{aligned} &= \frac{a}{2} \left[\frac{e^{(ix+a)s}}{(ix+a)^2} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{(ix-a)s}}{(ix-a)^2} \Big|_0^{\infty} \right] = \frac{a}{2} \left[\frac{1}{(ix+a)^2} + \frac{1}{(ix-a)^2} \right] = \frac{a}{2} \left[\frac{(ix-a)^2 + (ix+a)^2}{(ix+a)^2 (ix-a)^2} \right] \\ &= \frac{a}{2} \left[\frac{-x^2 - 2ixa + a^2 + -x^2 + 2ixa + a^2}{(ix+a)^2 (ix-a)^2} \right] = \frac{a}{2} \left[\frac{-2x^2 + 2a^2}{(-x^2 - a^2)^2} \right] = \frac{a^3 - ax^2}{(x^2 + a^2)^2} \end{aligned}$$

Luego por el teorema de la antitransformada, se tiene lo pedido.

P2.- Encuentre la transformada de Fourier de

$$f(x) = e^{-|x|} \sin(2x)$$

Demostración:

Usemos la forma integral de la transformada

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \sin(2x) e^{-isx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^x \sin(2x) e^{-isx} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(2x) e^{-isx} dx \right] \\
&= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^x (e^{2ix} - e^{-2ix}) e^{-isx} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} (e^{2ix} - e^{-2ix}) e^{-isx} dx \right] \\
&= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(1+2i-is)x} dx - \int_{-\infty}^0 e^{(1-2i-is)x} dx + \int_0^{\infty} e^{(-1+2i-is)x} dx - \int_0^{\infty} e^{(-1-2i-is)x} dx \right] \\
&= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(1+2i-is)x}}{(1+2i-is)} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{(1-2i-is)x}}{(1-2i-is)} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{(-1+2i-is)x}}{(-1+2i-is)} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{(-1-2i-is)x}}{(-1-2i-is)} \Big|_0^{\infty} \right]
\end{aligned}$$

Los límites a $-\infty$ y ∞ van a 0 dado que las partes reales de las exponenciales correspondientes poseen el signo correcto para que estas converjan.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{(1+2i-is)} - \frac{1}{(1-2i-is)} - \frac{1}{(-1+2i-is)} + \frac{1}{(-1-2i-is)} \right] \\
&= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \left[\frac{(1-2i-is) - (1+2i-is)}{(1+2i-is)(1-2i-is)} - \frac{(-1-2i-is) - (-1+2i-is)}{(-1-2i-is)(-1+2i-is)} \right] \\
&= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-4i}{1-2i-is+2i+4+2s-is-2s-s^2} - \frac{-4i}{1-2i+is+2i+4-2s+is+2s-s^2} \right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-2is+4-s^2} - \frac{1}{1+4+2is-s^2} \right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1}{(1-is)^2+4} - \frac{1}{(1+is)^2+4} \right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{(1+is)^2+4 - (1-is)^2-4}{[(1-is)^2+4][(1+is)^2+4]} \right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{4is}{[(1-is)^2+4][(1+is)^2+4]} \right]
\end{aligned}$$

P3.- Considere el dominio $\Omega = [0, L] \times \mathbb{R}_+$ y el siguiente sistema

$$\begin{cases} \partial_{xx}u + u = \partial_t u, (x, t) \in \Omega \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = f(x), \forall x \in [0, L] \end{cases}$$

que corresponde a la densidad de bacterias que se acumulan a lo largo del tiempo en un intervalo. Resuélvalo mediante separación de variables.

Demostración:

Suponemos soluciones no idénticamente nulas de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, la EDP queda como

$$\frac{X''}{X} + 1 = \frac{T'}{T} = \lambda \text{ constante}$$

Resolvemos la EDO para x . Acá veremos en detalle porqué por las condiciones de borde las soluciones deben ser de la forma senos y cosenos

$$\underline{1 - \lambda = 0}$$

La EDO para x queda definida como

$$X'' = 0$$

por lo tanto la solución general será

$$X(x) = Ax + B$$

la cual al cumplir las condiciones de borde, se llega a que $A = 0$ y $B = 0$, obteniéndose una solución nula, contradiciendo la hipótesis inicial

$$\underline{1 - \lambda < 0}$$

Podemos cambiar variable de la siguiente manera $-\alpha^2 = 1 - \lambda$, por lo tanto la EDO queda como

$$X'' - \alpha^2 X = 0$$

donde las soluciones son de la forma

$$X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

Para la primera condición de borde, se tiene que $A + B = 0$, pero para la segunda se tiene que $e^{\alpha L} = e^{-\alpha L}$, pero esto no puede ocurrir si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, por lo tanto la única opción que queda es que

$$\underline{1 - \lambda > 0}$$

Luego la EDO puede ser reescrita con el cambio de variable $\alpha^2 = 1 - \lambda$ como

$$X'' + \alpha^2 X = 0$$

donde las soluciones son de la forma

$$X(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$$

De las condiciones de borde, se tiene que $A = 0$ y que $\alpha L = k\pi$.

Ahora, resolvemos la EDO para la variable t

$$T' = \lambda T = (1 - \alpha^2)T = (1 - (\frac{k\pi}{L})^2)T$$

por lo tanto

$$T(t) = A e^{(1 - (\frac{k\pi}{L})^2)t}$$

Luego la solución general puede ser descrita por

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{(1 - (\frac{k\pi}{L})^2)t} \sin((\frac{k\pi}{L})x)$$

Ahora usamos las condiciones iniciales para obtener los coeficientes B_k . Dado que

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin((\frac{k\pi}{L})x)$$

Significa que necesitamos una descomposición de Fourier en senos de la función $f(x)$, por lo cual usaremos su extensión impar

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, L] \\ -f(x), & x \in [-L, 0] \end{cases}$$

por lo que

$$B_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \bar{f}(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(kx) dx$$

Luego la solución general queda dada por

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(kx) dx] e^{(1 - (\frac{k\pi}{L})^2)t} \sin((\frac{k\pi}{L})x)$$

P4.- Considere el siguiente dominio $\Omega = [0, \pi] \times \mathbb{R}_+$ en donde está definida la siguiente EDP

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u - 6\partial_x u, \forall (x, t) \in \Omega \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = e^{3x}, \forall x \in [0, \pi] \end{cases}$$

El anterior sistema corresponde a un sistema difusivo que posee una asimetría. Resuelva usando el método de separación de variables.

Demostración:

Consideremos soluciones no idénticamente nulas de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Luego la EDP puede ser reescrita como

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} - 6\frac{X'}{X} = \lambda \text{ constante}$$

Resolviendo la EDO para x se tiene que

$$X'' - 6X' - \lambda X = 0$$

puede ser resuelta mediante polinomio característico, por lo tanto sus soluciones serán de la forma

$$X(x) = Ae^{l_+x} + Be^{l_-x}$$

donde

$$l_{\pm} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + \lambda}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 + \lambda}$$

Ahora las condiciones de borde dirán los valores que puede tomar λ

$$u(0, t) = 0 \implies X(0) = 0 = A + B$$

$$u(\pi, t) = 0 \implies X(\pi) = 0 = Ae^{l_+\pi} + Be^{l_-\pi}$$

Usando ambas condiciones, se llega a que

$$0 = A(e^{l_+\pi} - e^{l_-\pi})$$

por lo tanto

$$e^{l_+\pi} = e^{l_-\pi}$$

$$e^{2\sqrt{9+\lambda}\pi} = 1 = e^{2i\pi k}, k \in \mathbb{N}$$

por lo tanto

$$9 + \lambda = -k^2$$

Por tanto la solución para la EDO de x será

$$X(x) = Ae^{3x}(e^{ik} - e^{-ik}) = \bar{A}e^{3x}\sin(kx)$$

Luego resolvemos la EDO para t

$$T' = \lambda T = (-9 - k^2)T$$

$$T(t) = Be^{-(9+k^2)t}$$

Luego la solución general para la EDP será dada por

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-(9+k^2)t} e^{3x} \sin(kx)$$

Ahora utlicemos la condició inicial para obtener los coeficientes B_k

$$u(x, 0) = e^{3x}x = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{3x} \sin(kx) = e^{3x} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kx)$$

Luego

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kx)$$

por lo tanto necesitamos descomponer la función $f(x) = x$ en una serie de Fourier de senos. Dado que $f(x)$ es una función impar intrinsecamente, calcularemos los coeficientes de Fourier de esta función en base a su extensión impar natura

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos(kx)}{k} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi(-1)^k}{k} + \frac{1}{k^2} \sin(kx) \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

Luego la solución general es dada por

$$u(x, t) = e^{3x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} e^{-(9+k^2)t} \sin(kx)$$