Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto

Auxiliar 13 Pauta

16 de Noviembre de 2022

P1.- Usando la función

$$f(x) = \begin{cases} x, x \in [0, \pi] \\ 0, x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

utilizar la propiedad de convergencia de las series de Fourier para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Demostración:

Primero vemos como son los coeaficientes de Fourier de esta función $f(x)$ definida en un intervalo de largo L, es tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{n\pi x}{L}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(\frac{n\pi x}{L})$$

esto hace que tanto $cos(\frac{n\pi x}{L})$ como $sin(\frac{n\pi x}{L})$ son un conjunto ortonormal, por lo tanto sus coeficientes pueden ser calculados de la siguiente manera

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x)cos(\frac{2n\pi x}{L})dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x)sin(\frac{2n\pi x}{L})dx$$

notese que lo anterior quiere decir que la función tendrá una extensión periódica de período L. En el caso particular de la función que nos proponen, el largo del intervalo es 2π, por lo tanto los coeficientes de Fourier quedan determinados como

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} xdx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} xcos(nx)dx = \frac{1}{\pi}[\frac{xsin(nx)}{n}|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} sin(nx)dx]$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{cos(nx)}{n^2}|_0^\pi = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi xsin(nx)dx = \frac{1}{\pi}[-\frac{xcos(nx)}{n}|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi cos(nx)dx]$$

$$= \frac{1}{\pi}[-\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}sin(nx)|_0^\pi] = -\frac{(-1)^n}{n}$$

Luego la función $f(x)$ presentada al inicio, puede ser descrita como serie de Fourier en todo punto de continuidad de la siguiente manera

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} cos(nx) + \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{(-1)^m}{m} sin(mx)$$

Pero dado que los coeficientes de Fourier que acompañan al coseno son 0 salvo cuando n es impar, esta puede ser descrita como

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2n-1)^2} cos((2n-1)x) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{n} sin(nx)$$

Ahora, como $x = 0$ es un punto de continuidad de la función, se tiene que

$$f(x=0) = 0 = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2}$$

Luego, reordenando los términos

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

P2.- a) Demuestre que si definimos

$$f : (0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = cos(x)$$

entonces

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\frac{n}{4n^2-1}sen(2nx)$$

b) Use los teoremas de convergencia de series de Fourier para demostrar que

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16}=\frac{1}{2^2-1}-\frac{3}{6^2-1}+\frac{5}{10^2-1}...$$

Demostración:

El centro de este problema, es entender que las series de Fourier posee paridad intrínseca. Si miramos la función $cos(x)$, vemos que su descomposición en serie de Fourier sería solo $cos(1x)$, donde a_n sin todos 0 salvo $n=1$, y $b_n=0$ siempre. Ahora como queremos descomponer la función $cos(x)$ en $sin(nx)$, extenderemos de manera impar esta función.

$$\bar{f}(x)=\begin{cases}cos(x), x\in[0,\pi]\\ -cos(x), x\in[-\pi,0]\end{cases}$$

Luego los coeficientes puedes calcularse de la siguiente manera

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}(x)sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}cos(x)sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[sin(nx-x)+sin(nx+x)]dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}[\frac{cos((n-1)x)}{n-1}+\frac{cos((n+1)x)}{n+1}]|_0^{\pi}=-\frac{1}{\pi}[\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}+\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}]$$

los coeficientes anteriores son 0 sin n es impar, por lo cual nos reduciremos solo a los coeficientes pares

$$b_{2n}=-\frac{1}{\pi}[\frac{-2}{2n-1}+\frac{-2}{2n+1}]=\frac{2}{\pi}\frac{2n+1+2n-1}{(2n)^2-1}=\frac{2}{\pi}\frac{4n}{(2n)^2-1}$$

Luego la función propuesta, en los puntos de continuidad (i.e. $\forall x\in(0,\pi)$) puede ser descrita como

$$cos(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\frac{n}{(2n)^2-1}sin(2nx)$$

b)

Evaluando en el punto decontinuidad $x=\frac{\pi}{4}$, se tiene que

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\frac{n}{(2n)^2-1}sin(\frac{n\pi}{2})$$

donde reordenando, se tiene que

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n)^2 - 1} sin(\frac{n\pi}{2})$$

donde los términos del lado derecho son no nulos si n es impar. Luego

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{(2(2l+1))^2 - 1} sin(\frac{2l\pi + \pi}{2}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{(2(2l+1))^2 - 1} (-1)^l = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{3}{6^2 - 1} + \frac{5}{10^2 - 1} \ldots$$

P3.- Calcule las transformadas de Fourier de las sguienter funciones

a)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} k, |x| < a \\ 0, |x| > a \end{cases}$$

En lo que sigue, identificaremos la transformada de Fourier de la función constante de la siguiente manera

$$\hat{L} = 2L\pi\delta(s)$$

Demostración:

a)

$$\mathcal{F}(f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-(is+1)x} dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(is+1)x}}{i(s+1)} |_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(is+1)}$$

donde el primer límite converge a 0 dado que la exponencial posee una parte real negativa.

b)

$$\mathcal{F}(g)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} k e^{-isx} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} k \frac{e^{-isx}}{is} |_{-a}^{a}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} k \frac{e^{-isa} - e^{isa}}{is} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} k \frac{2sin(as)}{s} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{sin(as)}{s}$$

P4.- a) Usando la definición de transformada de Fourier demuestre la identidad de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\bar{g(y)}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\bar{\hat{g}}(s)ds$$

b) Con lo anterior, demuestre la identidad de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$$

Demostración:

a) Partamos del lado derecho y leguemos al lado izquierdo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\bar{\hat{g}}(s)ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx]\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-isy}dy]}ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}\bar{g}(y)e^{isy}dxdyds$$

Ahora como f, g son funciones que supondremos decaen lo suficientemente rápido, podemos usar Fubbini

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(y)[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x-y)}ds]dxdy$$

donde podemos reconocer la transformada de Fourier de la función constante

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(y)[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x-y)}ds]dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(y)2\pi\delta(x-y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\bar{g}(y)[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-y)dx]dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\bar{g}(y)dy$$

b) Ahora, para obtener la identidad de Parseval, basta tomar $g(x) = f(x)$,llegando a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\bar{f(y)}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\bar{\hat{f}}(s)ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$$