

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto



Pauta Auxiliar 14

23 de Noviembre de 2022

P1.- Encontrar las funciones cuyas transformadas de Fourier son las siguientes

a) $\mathcal{F}(s) = \delta(s - \omega_0) + \delta(s + \omega_0)$

b) Para $a > 0$, $\mathcal{G}(s) = \frac{2a}{a^2 + s^2}$

c) $\mathcal{H}(s) = \frac{e^{is}}{2 + 3is}$

Demostración:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} (\delta(s - \omega_0) + \delta(s + \omega_0)) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \delta(s - \omega_0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \delta(s + \omega_0) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \cos(\omega_0 x) \end{aligned}$$

b)

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \frac{2a}{a^2 + s^2} ds$$

usemos la función extendida a los complejos

$$\bar{g}(z) = e^{isx} \frac{2a}{a^2 + z^2}$$

que posee polos en $z = ai$ y $z = -ia$

Primero consideremos $x > 0$. Con esto necesitamos usar un contorno adecuado para calcular esta integral mediante residuos. Consideremos la semicircunferencia de radio R en el semiplano superior, luego para R suficientemente grande

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \bar{g}(z) dz &= \int_{-R}^R e^{isx} \frac{2a}{a^2 + s^2} ds + \int_0^{\pi} e^{isxR(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} \frac{2a}{a^2 + R^2 e^{2i\theta}} R e^{i\theta} i d\theta \\ &= \int_{-R}^R e^{isx} \frac{2a}{a^2 + s^2} ds + \int_0^{\pi} e^{ixR(\cos(\theta) - xR\sin(\theta))} \frac{2a}{a^2 + R^2 e^{2i\theta}} R e^{i\theta} i d\theta = 2i\pi e^{-ax} \frac{2a}{ai + ai} = 2\pi e^{-ax} \end{aligned}$$

donde la 2da integral converge a 0 si es que $R \rightarrow \infty$. Ahora si $x < 0$, consideremos el mismo tipo de semicircunferencia pero en el semiplano inferior

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} \bar{g}(z) dz &= \int_R^{-R} e^{isx} \frac{2a}{a^2 + s^2} ds + \int_{\pi}^{2\pi} e^{isxR(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} \frac{2a}{a^2 + R^2 e^{2i\theta}} R e^{i\theta} i d\theta \\
&= \int_R^{-R} e^{isx} \frac{2a}{a^2 + s^2} ds + \int_{\pi}^{2\pi} e^{ixR(\cos(\theta))} e^{-xR\sin(\theta)} \frac{2a}{a^2 + R^2 e^{2i\theta}} R e^{i\theta} i d\theta = 2i\pi e^{ax} \frac{2a}{-ai - ai} = -2\pi e^{ax}
\end{aligned}$$

Ahora, la segunda integral converge a 0 dado que $-xR\sin(\theta) < 0$ para $\theta \in [\pi, 2\pi]$

Luego, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \frac{2a}{a^2 + s^2} ds = 2\pi e^{-a|x|}$$

Luego

$$g(x) = \sqrt{2\pi} e^{-a|x|}$$

c)

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \frac{e^{is}}{2 + 3is} ds = \frac{1}{3i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{is(x+1)}}{s - \frac{2i}{3}} ds$$

Ahora usaremos la siguiente función extendida a los complejos

$$\bar{h}(z) = \frac{e^{iz(x+1)}}{z - \frac{2i}{3}}$$

la cual posee un polo simple en $z = \frac{2i}{3}$. Consideremos primero $(x+1) > 0$ y el semicirculo en el semiplano superior. Luego del teorema de Residuos

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} \bar{h}(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{is(x+1)}}{s - \frac{2i}{3}} ds + \int_0^{\pi} \frac{e^{iR(x+1)(\cos(\theta) + i\sin(\theta))}}{Re^{i\theta} - \frac{2i}{3}} R e^{i\theta} i d\theta \\
&= \int_{-R}^R \frac{e^{is(x+1)}}{s - \frac{2i}{3}} ds + \int_0^{\pi} \frac{e^{iR(x+1)\cos(\theta)} e^{-R(x+1)\sin(\theta)}}{Re^{i\theta} - \frac{2i}{3}} R e^{i\theta} i d\theta = 2i\pi e^{i\frac{2i}{3}(x+1)} = 2i\pi e^{-2(x+1)/3}
\end{aligned}$$

La segunda integral converge a 0 dado que $-(x+1)\sin(\theta) < 0$ para $\theta \in [0, \pi]$. Ahora si $(x+1) < 0$, usemos la semicircunferencia en el semiplano inferior

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} \bar{h}(z) dz &= \int_R^{-R} \frac{e^{is(x+1)}}{s - \frac{2i}{3}} ds + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{iR(x+1)(\cos(\theta) + i\sin(\theta))}}{Re^{i\theta} - \frac{2i}{3}} R e^{i\theta} i d\theta \\
&= \int_R^{-R} \frac{e^{is(x+1)}}{s - \frac{2i}{3}} ds + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{iR(x+1)\cos(\theta)} e^{-R(x+1)\sin(\theta)}}{Re^{i\theta} - \frac{2i}{3}} R e^{i\theta} i d\theta = 0
\end{aligned}$$

dado que el interior geométrico de esta curva cerrada regular no contiene polos. En este recorrido, la 2da integral converge a 0 dado que $-(x+1)\sin(\theta) < 0$ para $\theta \in [\pi, 2\pi]$

Luego podemos reescribir la antitransformada como

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{3i\sqrt{2\pi}} 2i\pi e^{-2(x+1)/3} = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} e^{-2(x+1)/3}, & (x+1) > 0 \\ 0, & (x+1) < 0 \end{cases}$$

P2.- Considere el dominio $\Omega = [0, \pi]$ y $t \in \mathbb{R}_+$. Resuelva la siguiente EDP mediante el método de separación de variables

$$\begin{cases} \partial_{tt}y - \partial_{xx}y = 4\sin(2x), & x \in \Omega \\ y(0, t) = y(\pi, t) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ y(x, 0) = 0, & \forall x \in [0, \pi] \\ \partial_t y(x, 0) = \pi - x, & \forall x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Demostración:

Consideremos el siguiente cambio de variable $u(x, t) = y(x, t) - \sin(2x)$

de acá se desprende que

$$\partial_x u(x, t) = \partial_x y(x, t) - 2\cos(2x)$$

y que

$$\partial_{xx}u(x, t) = \partial_{xx}y(x, t) + 4\sin(2x)$$

Con esto, el sistema puede ser descrito de la siguiente manera

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0, & x \in \Omega \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = -\sin(2x), & \forall x \in [0, \pi] \\ \partial_t u(x, 0) = \pi - x, & \forall x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Consideremos ahora soluciones del tipo $u(x, t) = X(x)T(t)$ no idénticamente nula. Luego la EDP puede ser reescrita como

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = L \text{ constante}$$

De las condiciones de borde, vemos que, como asumimos soluciones no nulas, vemos que las soluciones generalizadas de la EDO para X serán exponenciales, pero dadas las condiciones de borde estas deben ser exponenciales complejas, por lo tanto podemos reemplazar $L = -\lambda^2$.

Luego podemos reescribir las soluciones para la EDO de X como

$$X(x) = \alpha \cos(\lambda x) + \beta \sin(\lambda x)$$

De las condiciones de borde, $\alpha = 0$ y $\lambda = k$, con $k \in \mathbb{N}$. Luego las soluciones básicas en función de k pueden ser descritas como

$$u_k(x, t) = A_k \cos(kt) \sin(kx) + B_k \sin(kt) \sin(kx)$$

Luego de forma generalizada se tiene que

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(kt) \sin(kx) + B_k \sin(kt) \sin(kx)$$

Luego usando las condiciones iniciales, se tiene que

$$u(x, 0) = -\sin(2x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx)$$

Luego de acá sale que todos los coeficientes A_k son 0 salvo $k = 2$, donde $A_2 = -1$

Ahora, la segunda condición inicial, se tiene que

$$\partial_t u(x, 0) = \pi - x = \sum_{k=0}^{\infty} -A_k k \sin(k0) \sin(kx) + B_k \cos(k0) \sin(kx) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k k \sin(kx)$$

Luego, es la descomposición en series de Fourier de la función $f(x) = \pi - x$ en $\sin(\cdot)$. Luego usando la ortonormalidad de estas funciones, si extendemos de manera impar la función $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, se llega a que

$$\begin{aligned} B_k k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)(\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx)(\pi - x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-(\pi - x) \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx \right] = \frac{2}{\pi} \left[\pi \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \sin(kx) \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{k} \end{aligned}$$

Luego podemos reescribir la solución para el problema auxiliar de la siguiente manera

$$u(x, t) = -\cos(kt) \sin(kx) + \sum_{k=0}^{\infty} + \frac{2}{k^2} \sin(kt) \sin(kx)$$

Luego el problema original posee la siguiente solución

$$y(x, t) = \sin(2x) - \cos(2t) \sin(2x) + \sum_{k=0}^{\infty} + \frac{2}{k^2} \sin(kt) \sin(kx)$$

P3.- Considere un disco de radio R centrado en el origen y la siguiente EDP

$$\begin{cases} \Delta u(\rho, \theta) = 0, (\rho, \theta) \in B(0, R) \\ u(R, \theta) = T, \theta \in]0, \pi] \\ u(R, \theta) = -T, \theta \in]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Resuelva usando el método de separación de variables e imponga las condiciones de regularidad necesarias para obtener una solución general.

Demostración:

Primero recordemos cual es la forma que posee el laplaciano en cilíndricas

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho \partial_\rho u) + \frac{1}{\rho^2} \partial_{\theta\theta} u$$

Supongamos soluciones no trivialmente nulas de la forma $u = P(\rho)K(\theta)$, de acá obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{1}{\rho P} \partial_\rho(\rho \partial_\rho P) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{K''}{K} = \lambda$$

Consideremos la siguiente EDO. Resolvamos la EDO para K .

$$K'' + \lambda K = 0$$

Ahora como estamos en un disco, entonces las soluciones para esta EDO deben ser periódicas de forma que $K(0) = K(2\pi)$, por lo tanto $\lambda = k$ con $k \in \mathbb{N}$, ya que si este no fuera el caso, estas serían exponenciales, pero las condiciones de 1er y 2do orden (igualando la función y su derivada para $\theta = 0, 2\pi$) implicarían que los coeficientes que acompañan a las exponenciales serían nulos.

Una forma explícita de verlo es la siguiente. Las soluciones a la EDO son de la siguiente manera

$$K(\theta) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}\theta} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$$

de las condiciones de regularidad se tiene que

$$\alpha + \beta = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}2\pi} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi}$$

$$\sqrt{-\lambda}(\alpha - \beta) = \sqrt{-\lambda}(\alpha e^{\sqrt{-\lambda}2\pi} - \beta e^{-\sqrt{-\lambda}2\pi})$$

Sumando ambas ecuaciones se llega a que

$$e^{\sqrt{-\lambda}2\pi} = 1 = e^{2i\pi k}, k \in \mathbb{N}$$

llegando a que $\lambda = k^2$

Por lo tanto

$$K(\theta) = \alpha \cos(k\theta) + \beta \sin(k\theta)$$

Ahora, la EDO para P será

$$\rho^2 P'' + \rho P' - k^2 P = 0$$

Ahora, esta EDO puede resolverse suponiendo soluciones del tipo $P(\rho) = A\rho^l$, llegando a que

$$A\rho^l[l(l-1) + l - k] = 0$$

luego $l = \pm k$, por lo tanto

$$P(\rho) = \gamma \rho^{-k} + \delta \rho^k$$

Pero estas soluciones deben ser uniformemente finitas, además de respetar condiciones de regularidad, por lo tanto $\gamma = 0$.

Luego las soluciones serán de la forma

$$u_k(\rho, \theta) = A_k \rho^k \cos(k\theta) + b_k \rho^k \sin(k\theta)$$

por tanto la solución general puede ser descrita mediante

$$u(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \rho^k \cos(k\theta) + B_k \rho^k \sin(k\theta)$$

Ahora usaremos las condiciones de borde. Como

$$u(R, \theta) = \pm T = \sum_{k=0}^{\infty} A_k R^k \cos(k\theta) + B_k R^k \sin(k\theta)$$

Luego es una descomposición en series de Fourier de la condición de borde, pero como podemos describir el círculo con $\theta \in [-\pi, \pi]$, vemos que la condición de borde es impar como función del ángulo. Luego los únicos coeficientes que sobreviven son los B_k

$$B_k R^k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sgn}(\theta) T \sin(k\theta) d\theta = -\frac{2T}{\pi} \frac{\cos(k\theta)}{k} \Big|_0^{\pi} = -\frac{2T}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k}$$

de los cuales sólo sobreviven los índices impares

$$B_{2p+1} = \frac{4T}{(2p+1)R^{2p+1}}$$

Luego la solución general de la EDP puede ser descrita como

$$u(\rho, \theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4T}{(2p+1)R^{2p+1}} \rho^{2p+1} \sin((2p+1)\theta)$$