Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto

Pauta Auxiliar 12

09 de Noviembre de 2022

P1.- a) Sean $n > k \geq 1$ enteros. Demuestre mediante la integral de Cauchy que

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,1)} \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}}dz$$

Demostración:

Podemos apreciar que para la función $f(z) = \dfrac{(z+1)^n}{z^{k+1}}$, $z = 0$ es un único polo de orden $k+1$, el cual se encuentra en el interior geométrico de $\partial D(0,1)$. luego esta integral es posible calcularla mediante el teorema de los Residuos.

Sabiendo que un polo z_0 de una función $g(z)$ de orden n, es posible calcular su residuo como

$$Res(g, z_0) = lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$$

se tiene que

$$\oint_{\partial D(0,1)} \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}}dz = lim_{z\longrightarrow 0}\frac{1}{(k+1-1)!}\frac{d^{k+1-1}}{dz^{k+1-1}}[(z-z_0)^{k+1}\frac{(z+1)^n}{(z-0)^{k+1}}]$$

$$= lim_{z\longrightarrow 0}\frac{1}{(k)!}\frac{d^{k+1-1}}{dz^{k+1-1}}(z+1)^n = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Luego, reemplazando esto en el teorema de Residuios

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,1)} \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}[2i\pi\sum_{i=1}^{L} Res(f(z), z_i)] = \binom{n}{k}$$

b) Ocupe lo anterior para demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$$

Demostración:

Partamos por el lado izquierdo y utilicemos el resultado anterior

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{5^n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,1)}\frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1}}dz] = \sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,1)}\frac{1}{z}\frac{(z+1)^{2n}}{(5z)^n}dz]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,1)}\frac{1}{z}(\frac{(z+1)^2}{5z})^n dz]$$

Ahora, como $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que la integral posee una cantidad finita de polos de orden fnito, y dado que cada integral normalizada con $2\pi i$ da un resultado positivo, por monotonía y convergencia podemos intercambiar la integral con la serie

$$= \oint_{\partial D(0,1)}[\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(z+1)^2}{5z})^n]dz$$

obteniéndose una serie de potencias. Ahora, veamos si la serie converge dentro del dominio de integración

$$|\frac{(z+1)^2}{5z}| \leq \frac{(|z+1|)^2}{5|z|} \leq \frac{(2)^2}{5} = \frac{4}{5}$$

Luego es una serie geométrica convergente en el disco unitario, por lo tanto

$$\oint_{\partial D(0,1)}[\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{(z+1)^2}{5z}}]dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,1)}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{(z+1)^2}{5z}}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,1)}\frac{5}{3z-z^2-1}dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,1)}\frac{5}{z^2-3z+1}dz$$

Luego, esta nueva función tiene 2 polos simples

$$z_{\pm} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

de los cuales z_- está encerrado dentro de la curva cerrada simple. Luego por el teorema de Residuos, se tiene que

$$= -\frac{1}{2\pi i}2i\pi \quad lim_{z\longrightarrow z_-}(z-z_-)\frac{5}{(z-z_+)(z-z_-)} = -\frac{5}{z_- - z_+}$$

$$= -\frac{5}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = -\frac{5}{-\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

demostrando lo pedido

P2.- Demuestre que

$$\int_0^{\pi}\frac{sin(\theta)^2}{1+cos(\theta)^2}d\theta = \pi(\sqrt{2}-1)$$

Demostración:

Recordemos que

$$cos(2\theta) = 2cos(\theta)^2 - 1 = 1 - 2sin(\theta)^2$$

Luego, la integral anterior se puede reescribir como

$$\int_0^{\pi} \frac{\dfrac{1-cos(2\theta)}{2}}{1+\dfrac{1+cos(2\theta)}{2}} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1-cos(2\theta)}{3+cos(2\theta)} d\theta$$

luego realizando el cambio de variable $t = 2\theta$, se tiene que

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1-cos(t)}{3+cos(t)} dt$$

Esta integral la podemos reparametrizar en el disco unitario con recorrido antohorario

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} \frac{1-\dfrac{z+z^{-1}}{2}}{3+\dfrac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i}\oint_{\Gamma} \frac{2z-z^2-1}{6z+z^2+1}\frac{dz}{z}$$

donde debemos analizar los ceros de $6z + z^2 + 1$, ya que $z = 0$ ya es un polo de orden 1. Luego los ceros del polinomio de grado 2 son $z_{\pm} = -3 \pm 2\sqrt{2}$, donde sólo z_+ está encerrado por Γ.

Calculemos el primer residuio

$$Res(f(z), 0) = lim_{z \longrightarrow 0}(z-0)\frac{2z-z^2-1}{6z+z^2+1}\frac{1}{(z-0)} = -1$$

ahora con el polo no trivial

$$Res(f(z), z_+) = lim_{z \longrightarrow z_+}(z-z_+)\frac{2z-z^2-1}{(z-z_+)(z-z_-)}\frac{1}{(z-0)} = \frac{2z_+-z_+^2-1}{(z_+-z_-)}\frac{1}{z_+}$$

pero $6z_+ = -z_+^2 - 1$, por lo tanto

$$= \frac{8z_+}{(z_+-z_-)}\frac{1}{z_+} = \frac{8}{(z_+-z_-)} = \frac{8}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Luego, juntanto los residuos y aplicando el teorema se tiene que

$$\int_0^{\pi} \frac{sin(\theta)^2}{1+cos(\theta)^2} d\theta = \frac{1}{2i}2i\pi[Res(f(z), z_+) + Res(f(z), 0)] = \pi[\sqrt{2}-1]$$

P3.- Calcule la siguiente integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$$

Demostración:

Parametricemos la siguiente curva cerrada simple por trozos

$$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = t, t \in [0, R]\}$$

$$\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{it}, t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

$$\Gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : z = it, t \in [R, 0]\}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

Ahora veamos que polos posee la función $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ para llegara la integral impropia que se desea calcular. Vemos que $z^4 = -1$ posee 4 raíces complejas distintas $z_{sol} = e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}$, de las cuales sólo la primerea se encuentra encerrada por Γ. En vista del teorema de los Residuos, se tiene que

$$\oint_\Gamma \frac{1}{1+z^4}dz = 2i\pi Res(\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{i\pi}{4}}) = 2i\pi \frac{1}{(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{3i\pi}{4}})(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{5i\pi}{4}})(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{7i\pi}{4}})}$$

$$= 2i\pi e^{\frac{-3i\pi}{4}} \frac{1}{(1-e^{\frac{2i\pi}{4}})(1-e^{\frac{4i\pi}{4}})(1-e^{\frac{6i\pi}{4}})} = 2i\pi e^{\frac{-3i\pi}{4}} \frac{1}{(1-e^{\frac{i\pi}{2}})(1-e^{i\pi})(1-e^{\frac{3i\pi}{2}})}$$

$$= 2i\pi(-1-i)\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{(1-i)(1-(-1))(1-(-i))} = -i\pi\sqrt{2}(1+i)\frac{1}{4} = \pi\frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)$$

Ahora veamos que ocurre con las parametrizaciones de cada una de los trozos de curva

$$\oint_\Gamma \frac{1}{1+z^4}dz = \int_0^R \frac{1}{1+t^4}dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Re^{it}}{1+R^4e^{4it}}idt + \int_R^0 \frac{1}{1+(it)^4}idt$$

$$= \int_0^R \frac{1}{1+t^4}dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Re^{it}}{1+R^4e^{4it}}idt - \int_0^R \frac{1}{1+t^4}dt$$

donde al tomar el límite de $R \longrightarrow \infty$ la integral de al medio converge a 0, dado que su integrando se va a 0 uniformemente. Luego es posible separar parte real e imaginaria del teorema de Residuos y obtener que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx = \pi \frac{\sqrt{2}}{4}$$