Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto

Auxiliar 10 Pauta

19 de Octubre de 2022

P1.- Sabemos que para un número complejo distintio de $z = 0$ puede ser descrito como $z = re^{i\theta}$ en su forma polar.

Definamos la función logaritmo de la siguiente manera

$$log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$log(z) = ln(r) + i\theta$$

con $\theta \in]-\pi, \pi]$, la cual es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

a) Considere el disco centrado e el origen de radio R con orientación antihoraria y calcule su integral de linea

Demostración:

Primero parametricemos el disco de radio R

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{i\theta}, \theta \in [-\pi, \pi]\}$$

Luego la integral de linea en la frontera del disco puede ser descrita como

$$\int_\Gamma log(z)dz = \int_{-\pi}^{\pi} log(Re^{i\theta})Re^{i\theta}id\theta = i\int_{-\pi}^{\pi} [ln(R) + i\theta]Re^{i\theta}d\theta$$

$$= iln(R)R\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}d\theta - R\int_{-\pi}^{\pi} \theta e^{i\theta}d\theta = iln(R)R\frac{e^{i\pi} - e^{-i\pi}}{i} - R[\frac{\theta e^{i\theta}}{i} - \frac{1}{i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}d\theta]$$

$$= iR(\pi e^{i\pi} - (-\pi)e^{-i\pi}) = -2iR\pi$$

b) ¿El resultado anterior contradice el teorema de Goursat?

Demostración:

Vemos que la función *log* tiene problemas en el origen, por lo cual en el interior geométrico de la curva propuesta no es holomorfa, por lo tanto la integral de linea cerrada no tiene por qué ser nula en este caso.

P2.- a) Considere $u(u,v)$ una función armónica y definamos

$$v(x,y)=\int_0^y \partial_x u(x,t)dt-\int_0^x \partial_y u(s,0)ds$$

Muestre que $f(x,y)=u(x,y)+iu(x,y)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$

Demostración:

Vemos que como $u(x,y)$ es armónica, se tiene que en particular es Frechet-derivable. Luego por álgebra de funciones clase $\mathcal{C}^1$, $v(x,y)$ será también Frechet-derivable. Luego para demostrar lo pedido es suficiente probar que cumple las condiciones de C-R.

$$\partial_x v(x,y)=\partial_x[\int_0^y \partial_x u(x,t)dt-\int_0^x \partial_y u(s,0)ds]=\int_0^y \partial_{xx}u(x,t)dt-\partial_y u(x,0)$$

Luego como $u(x,y)$ es armónica

$$=-\int_0^y \partial_{yy}u(x,t)dt-\partial_y u(x,0)=-\partial_y u(x,t)|_0^y-\partial_y u(x,0)$$

$$=-\partial_y u(x,y)+\partial_y u(x,0)-\partial_y u(x,0)=-\partial_y u(x,y)$$

Luego cumple la primera condición de C-R. Veamos la segunda

$$\partial_y v(x,y)=\partial_y[\int_0^y \partial_x u(x,t)dt-\int_0^x \partial_y u(s,0)ds]=\partial_x u(x,y)$$

por TFC. Luego $u(x,y)$ y $v(x,y)$ cumplen las condiciones de C-R y son Frechet-derivables. Luego $f(x,y))u(x,y)+iv(x,y)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$

b) Considere $u(x,y)=xsin(x)cosh(y)-ycos(x)sinh(y)$. Encuentre $v(x,y)$ tal que $f(x,y)=u(x,y)+iu(x,y)$ sea holomorfa en $\mathbb{C}$.

Demostración:

Veamos que esta función es efectivamente armónica para poder aplicar el resultado de la parte anterior.

$$\partial_x u(x,y)=sin(x)cosh(y)+xcos(x)cosh(y)+ysin(x)sinh(y)$$

$$\partial_{xx}u(x,y)=2cos(x)cosh(y)-xsin(x)cosh(y)+ycos(x)sinh(y)$$

$$\partial_y u(x,y)=xsin(x)sinh(y)-cos(x)sinh(y)-ycos(x)cosh(y)$$

$$\partial_{yy}u(x,y)=xsin(x)cosh(y)-2cos(x)cosh(y)-ycos(x)sinh(y)$$

Luego juntando las ecuaciones anteriores se tiene que

$$\partial_{xx}u(x,y) + \partial_{yy}u(x,y) = 0$$

Luego es armónica, y por ser funa función de clase $\mathcal{C}^\infty$, podemos aplicar el resultado de a)

$$v(x,y) = \int_0^y [sin(x)cosh(t) + xcos(x)cosh(t) + tsin(x)sinh(t)]dt$$

$$-\int_0^x [rsin(r)sinh(0) - cos(r)sinh(0) - 0cos(r)cosh(0)]dr$$

$$= sin(x)sinh(y) + xcos(x)sinh(y) + sin(x)\int_0^y tsinh(t)dt$$

$$= sin(x)sinh(y)+xcos(x)sinh(y)+sin(x)[ycosh(y)-sinh(y)] = xcos(x)sinh(y)+ysin(x)cosh(y)$$

P3.- Considere la fución a valores complejos definida por

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z}$$

y $1 > b > 0$. Utilice el teorema de Goursat y un dominio rectangular adecuado para demostrar que

a)

$$\int_0^\infty cos(t)[\frac{(1+t)(1-e^b)}{((1+t)^2+b^2)} + \frac{b^2}{(1+t)((1+t)^2+b^2)}] - sin(t)\frac{be^{-b}}{((1+t)^2+b^2)}dt + \int_0^b e^{-t}ln(1+t^2)dt$$

$$= \frac{1}{2}e^{-b}ln(1+b^2)$$

b)

$$\int_0^\infty sin(t)[\frac{(1+t)(1-e^b)}{((1+t)^2+b^2)} + \frac{b^2}{(1+t)((1+t)^2+b^2)}] + cos(t)\frac{be^{-b}}{((1+t)^2+b^2)}dt = \int_0^b \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt$$

Demostración:

Consideremos la siguiente curva regular por trozos

$$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = t, t \in [0,R]\}$$

$$\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = R + it, t \in [0,b]\}$$

$$\Gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : z = t + ib, t \in [R, 0]\}$$

$$\Gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} : z = it, t \in [b, 0]\}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

Luego, en el interior geométrico de la curva propuesta, la función es holomorfa, por lo tanto es válido el teorema de Goursat

$$\int_0^R \frac{e^{it}}{1+t}dt + \int_0^b \frac{e^{i(R+it)}}{1+R+it}idt + \int_R^0 \frac{e^{i(t+ib)}}{1+t+ib}dt + \int_b^0 \frac{e^{-t}}{1+it}idt = 0$$

Vemos que la 2da integral al estar definida sobre un intervalo acotado podemos acotarla y hacerla converger a 0

$$|\int_0^b \frac{e^{i(R+it)}}{1+R+it}idt| \leq \int_0^b \frac{e^{-t}}{|1+R+it|}dt \longrightarrow 0, \text{ si } R \longrightarrow \infty$$

dado que es una función bien definida, y el denominador del integrando converge a ∞. Luego podemos reescribir la integral original como

$$\int_0^\infty \frac{e^{it}}{1+t}dt - e^{-b}\int_0^\infty \frac{e^{it}}{(1+t)^2+b^2}(1+t-ib)dt - i\int_0^b \frac{e^{-t}}{1+t^2}(1-it)dt = 0$$

Trabajemos la última integral

$$\int_0^b \frac{e^{-t}}{1+t^2}(1-it)dt = \int_0^b \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt - \frac{i}{2}\int_0^b \frac{e^{-t}}{1+t^2}2tdt$$

$$= \int_0^b \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt - \frac{i}{2}[e^{-b}ln(1+b^2) + \int_0^b e^{-t}ln(1+t^2)dt]$$

Y la resta de las primeras 2 integrales queda

$$\int_0^\infty \frac{e^{it}}{1+t}dt - e^{-b}\int_0^\infty \frac{e^{it}}{(1+t)^2+b^2}(1+t-ib)dt = \int_0^\infty e^{it}\frac{(1+t)^2+b^2-e^{-b}(1+t)(1+t-ib)}{(1+t)((1+t)^2+b^2)}$$

$$= \int_0^\infty e^{it}\frac{(1+t)^2+b^2-e^{-b}(1+t)^2+ibe^{-b}(1+t)}{(1+t)((1+t)^2+b^2)}$$

$$= \int_0^\infty e^{it}[\frac{(1+t)(1-e^b)}{((1+t)^2+b^2)} + \frac{b^2}{(1+t)((1+t)^2+b^2)} + i\frac{be^{-b}}{((1+t)^2+b^2)}]dt$$

Luego, la integral original puede ser descrita como

$$\int_0^{\infty} e^{it}[\frac{(1+t)(1-e^b)}{((1+t)^2+b^2)} + \frac{b^2}{(1+t)((1+t)^2+b^2)} + i\frac{be^{-b}}{((1+t)^2+b^2)}]dt$$

$$-i\{\int_0^b \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt - \frac{i}{2}[e^{-b}ln(1+b^2) + \int_0^b e^{-t}ln(1+t^2)dt]\} = 0$$

la cual podemos separar en parte Real e Imaginaria

La parte Real será

$$\int_0^{\infty} cos(t)[\frac{(1+t)(1-e^b)}{((1+t)^2+b^2)}+\frac{b^2}{(1+t)((1+t)^2+b^2)}]-sin(t)\frac{be^{-b}}{((1+t)^2+b^2)}dt+\int_0^b e^{-t}ln(1+t^2)dt$$

$$= \frac{1}{2}e^{-b}ln(1+b^2)$$

Mientras que la parte Imaginaria queda

$$\int_0^{\infty} sin(t)[\frac{(1+t)(1-e^b)}{((1+t)^2+b^2)} + \frac{b^2}{(1+t)((1+t)^2+b^2)}] + cos(t)\frac{be^{-b}}{((1+t)^2+b^2)}dt = \int_0^b \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt$$