Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto

Auxiliar 9 Pauta

12 de Octubre de 2022

P1.- Encuentre los radios de dominios de convergencia para las siguientes series de potencias

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

Demostración:

Ocupemos el criterio del $limSup$ para calcular este radio de Convergencia

$$R^{-1} = limSup_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = limSup_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{|n|} = 1$$

Luego su radio de Convergencia es $R = 1$. Veamos que ocurre en la frontera. Tomemos $z = e^{i\theta}$ que corresponde a cualquier elemento en el círculo unitario. Luego se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{in\theta}$$

Ahora, si suponemos que esta serie es convergente en tonces los elementos de la suceción que la componen deberían converger a 0, sin embargo

$$|ne^{in\theta}| \longrightarrow \infty$$

Luego esta serie no converge en la frontera de su dominio de convergencia.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

Demostración:

Utilicemos ahora el criterio del cuociente

$$R^{-1} = limSup_{n \longrightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = limSup_{n \longrightarrow \infty} \frac{|\frac{1}{(n+1)^2}|}{|\frac{1}{n^2}|} = limSup_{n \longrightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= limSup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} = 1$$

Veamos que ocure en la frontera. Tomemos un elemento cualquiera en la frotnera del disco unitario $z = e^{i\theta}$

$$|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Luego al ser una serie absolutamente convergente, y por tanto es convergente en toda la frontera

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

Demostración:

En esta serie usaremos un acercamiento un poco distinto. Calculemos primero el radio de convergencia

$$R^{-1} = limSup_{n\longrightarrow\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = limSup_{n\longrightarrow\infty} \frac{|\frac{1}{(n+1)}|}{|\frac{1}{n}|} = limSup_{n\longrightarrow\infty} \frac{n}{(n+1)}$$

$$= limSup_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})} = 1$$

Su radio de convergencia es 1. Vemos que para $z = 1$ se tiene la serie armónica, la cual no converge, por lo tanto ya sabemos que en este punto de la frontera la serie no es convergente. Tomemos $z = e^{i\theta}$ con $\theta \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$$

Veamos que las sumas partiales forman una serie de Cauchy

$$\sum_{n=m}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=m}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{n}$$

donde

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$$

Luego

$$\sum_{n=m}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=m}^{N} \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n} = \sum_{n=m}^{N} \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} + \frac{S_{n-1}}{n-1} - \frac{S_{n-1}}{n} = \frac{S_N}{N} - \frac{S_{m-1}}{m-1} + \sum_{n=m}^{N} S_{n-1}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n})$$

Ahora acotemos la suma parcial original

$$|\sum_{n=m}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n}| \leq \frac{|S_N|}{N} + \frac{|S_m|}{m} + \sum_{n=m}^{N} |S_{n-1}|(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n})$$

Sabemos por la serie geométrica que, si $\theta \neq 2l\pi$, con $l \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=0}^{p} e^{ik\theta} = \frac{e^{i(p+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{-i\frac{\theta}{2}} \frac{e^{i(p+1)\theta} - 1}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

luego

$$|\sum_{k=0}^{p} e^{ik\theta}| \leq \frac{1}{|sin(\frac{\theta}{2})|}$$

por tanto la suma parcial anterior puede ser acotada por

$$|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}| \leq \frac{1}{|sin(\frac{\theta}{2})|}(\frac{1}{N} + \frac{1}{m-1} + \sum_{n=m}^{N}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n})) \leq \frac{1}{|sin(\frac{\theta}{2})|}(\frac{1}{N} + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{N})$$

$$= \frac{2}{|sin(\frac{\theta}{2})|(m-1)}$$

Luego para $\theta \neq 2l\pi$, con $l \in \mathbb{Z}$, siempre es posible encontrar $m \in \mathbb{Z}$ lo suficientemente grande tal que $\frac{2}{|sin(\frac{\theta}{2})|(m-1)} < \epsilon$, luego las sumar parciales de la serie corresponden a una suceción de Cauchy. Ahora como $\mathbb{C}$ es topológicamente completo (espacio de Banach), esta converge

P2.- Calcular las siguientes integrales de ínea en el plano complejo

i)

$$\int_L Re(z)dz$$

ii)

$$\int_L z^2 dz$$

iii)

$$\int_L \frac{dz}{z}$$

con curvas simples mediante las siguientes parametrizaciones descritas

a) La curva L partirá en $z = 1$, luego subirá verticalmente hasta $z = 1 + i$ y luego irá horizontalmente hasta $z = i$

Demostración:

Esta curva la parametrizaremos mediante dos trozos

$$L_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = 1 + it, t \in [0, 1]\}$$

$$L_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = t + i, t \in [1, 0]\}$$

donde el orden de los límites los denotamos en el orden en que será recorrido el trazo. Luego las integrales qudan de la siguiente manera

i)

$$\int_L Re(z)dz = \int_0^1 Re(1 + it)idt + \int_1^0 Re(t + i)dt = \int_0^1 1idt + \int_1^0 tdt = i - \frac{1}{2}$$

ii)

$$\int_L z^2dz = \int_0^1 (1 + it)^2idt + \int_1^0 (t + i)^2dt = i\int_0^1 (1 - t^2 + 2it)dt + \int_1^0 (t^2 - 1 + 2it)dt$$

$$= i(t-\frac{t^3}{3}+it^2)|_0^1+(\frac{t^3}{3}-t+it^2)|_1^0 = i(1-\frac{1}{3}+i)-(\frac{1}{3}-1+i) = i-\frac{i}{3}-1-\frac{1}{3}+1-i = -\frac{1}{3}(1+i)$$

iii)

$$\int_L \frac{dz}{z} = i\int_0^1 \frac{1}{(1 + it)}dt + \int_1^0 \frac{1}{(t + i)}dt = i\int_0^1 \frac{1 - it}{(1 + t^2)}dt + \int_1^0 \frac{t - i}{(t^2 + 1)}dt$$

$$= i\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt+\int_1^0 \frac{t}{1+t^2}dt-i\int_1^0 \frac{1}{1+t^2}dt = 2i\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = 2iarctan(t)|_0^1 = i\frac{\pi}{2}$$

b) L corresponde a un cuarto de circulo recorrido en sentido antihorario que parte en $z = 1$ y termina en $z = i$

Demostración:

Podemos parametrizar esta curva de la siguiente manera

$$L = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\theta}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

Luego las integrales quedan de la siguiente manera

i)

$$\int_L Re(z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Re(e^{i\theta})e^{i\theta} i d\theta = i\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(\theta)e^{i\theta}d\theta = \frac{i}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})e^{i\theta}d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{2i\theta}+1)d\theta = \frac{i}{2}(\frac{e^{2i\theta}}{2i}+\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{i}{2}(\frac{e^{i\pi}-1}{2i}+\frac{\pi}{2}) = \frac{i}{2}(\frac{-1}{i}+\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}+\frac{i\pi}{4}$$

ii)

$$\int_L z^2 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2i\theta}e^{i\theta} i d\theta = i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3i\theta}d\theta = i\frac{e^{3i\theta}}{3i}|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}(e^{3i\pi/2}-1) = \frac{1}{3}(-i-1) = -\frac{1}{3}(i+1)$$

iii)

$$\int_L \frac{dz}{z} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i\theta}e^{i\theta} i d\theta = i\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{i\pi}{2}$$

c) L corresponde auna recta que une $z = 1$ y $z = i$

Demostración:

Vemos que este segmento puede er parametrizado como

$$L = \{z \in \mathbb{C} : z = 1 + (i-1)t, t \in [0,1]\}$$

Luego las integrales pueden ser descritas como

i)

$$\int_L Re(z)dz = \int_0^1 Re((1-t)+it)(i-1)dt = (i-1)\int_0^1 (1-t)dt = (i-1)(t-\frac{t^2}{2})|_0^1 = \frac{1}{2}(i-1)$$

ii)

$$\int_L z^2 dz = \int_0^1 (1+(i-1)t)^2(i-1)dt = (i-1)\int_0^1 (1+2(i-1)t+(i-1)^2t^2)dt$$

$$= (i-1)(t+(i-1)t+(i-1)^2\frac{t^3}{3})|_0^1 = (i-1)(1+i-1+\frac{(i-1)^2}{3})$$

$$= (i-1)\frac{3i+1-2i-1}{3} = \frac{i}{3}(i-1) = \frac{1}{3}(1+i)$$

iii)

$$\int_L \frac{1}{z}dz = \int_0^1 \frac{1}{(1-t)+it}(i-1)dt = (i-1)\int_0^1 \frac{(1-t)-it}{(1-t)^2+t^2}dt = (i-1)\int_0^1 \frac{(1-t)-it}{1-2t+2t^2}dt$$

$$= (i-1)[-\int_0^1 \frac{2t-2}{1+(2t-1)^2}dt - i\int_0^1 \frac{2t}{1+(2t-1)^2}dt]$$

$$= (i-1)[-\int_0^1 \frac{2t-1}{1+(2t-1)^2}dt + \int_0^1 \frac{1}{1+(2t-1)^2}dt - i\int_0^1 \frac{2t-1}{1+(2t-1)^2}dt - i\int_0^1 \frac{1}{1+(2t-1)^2}dt]$$

Haciendo los cambios de variable $u = 1+(2t-1)^2$ en la 1ra y 3er integrales, y $v = 2t-1$ en la 2da y 4ta, se tiene que

$$(i-1)[-\int_2^2 \frac{du}{4u} + \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} - i\int_2^2 \frac{du}{4u} - i\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2}] = (i-1)(1-i)\frac{\pi}{4} = \frac{2i\pi}{4} = \frac{i\pi}{2}$$

Nota:

Las integrales ii) y iii) mantienen constante su valor a pesar de utilizar distintas parametrizaciones. Esto es debido a que son funciones que son Holomorfas a lo largo de la curva y cumplen las condiciones de C-R-

P3.- Sea $f \in H(\mathbb{C})$

a) Demuestre que para $\theta_0 \in]0, 2\pi[$ si se tiene que

$$lim_{R\longrightarrow\infty} R\int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})|d\theta = 0$$

entonces

$$e^{i\theta_0}\int_0^\infty f(te^{i\theta_0})dt = \int_0^\infty f(t)dt$$

Demostración:

Como $f \in H(\mathbb{C})$, la integral cerrada sobre cualquier curva regular por trozos y simple será 0 de acuerdo al resultado de Goursat. Proponemos la siguiente curva parametrizada por trozos:

$$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = t, t \in [0, R]\}$$

$$\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{i\theta}, \theta \in]0, \theta_0]\}$$

$$\Gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : z = te^{i\theta_\theta}, t \in [R, 0]\}$$

donde el orden en los extremos de los intervalos indica el sentido de recorrido de cada curva. Luego con $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, se tiene que, de acuerdo al teorema de Goursat

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

Luego podemos reescribir esta integral como

$$\int_0^R f(t)dt + \int_0^{\theta_0} f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}id\theta + \int_R^0 f(te^{i\theta_0})e^{i\theta_0}dt = 0$$

Veamos que la 2da integral converge a 0 si $R \longrightarrow \infty$

$$|\int_0^{\theta_0} f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}id\theta| \leq R\int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})|d\theta$$

el cual es la hipótesis que nos dan. Luego el teorema de Goursat puede ser reescrito de la siguiente manera luego de aplicar el límite

$$\int_0^{\infty} f(t)dt - \int_0^{\infty} f(te^{i\theta_0})e^{i\theta_0}dt = 0$$

que es el resultado pedido

b) Pruebe que para $f(z) = e^{-z^2}$ la hipótesis de a) se cumple para $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{4}[$

Demostración:

Veamos si esta función cumple la hipótesis pedida

$$lim_{R\longrightarrow\infty} R\int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})|d\theta = lim_{R\longrightarrow\infty}\int_0^{\theta_0} R|e^{-R^2e^{2i\theta}}|d\theta$$

$$= lim_{R\longrightarrow\infty}\int_0^{\theta_0} Re^{-R^2cos(2\theta)}|e^{-iR^2sin(2\theta)}|d\theta = lim_{R\longrightarrow\infty}\int_0^{\theta_0} Re^{-R^2cos(2\theta)}d\theta$$

Necesitamos que uniformemente el integrando se vaya a 0 es este caso. Esto ocurre si y sólo si $\forall\theta \in]0, \theta_0]$, $cos(2\theta) \geq 0$. luego esto es válido sólo si $\theta_0 < \frac{\pi}{4}$

c) Sabiendo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

encuentre el valor de las siguientes integrales

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}cos(x^2)dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}sin(x^2)dx$$

Demostración:

Utilicemos la función antes mendionada en b) y $\theta_0 = \dfrac{\pi}{8}$. Como $\theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, entonces es válido el resultado de a), por lo tanto

$$e^{i\frac{\pi}{8}} \int_0^\infty e^(- t^2 e^{2i\frac{\pi}{8}})dt = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

Como la Gaussiana es una fnción par, se tiene que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Luego el resultado anterior se puede expresar como

$$e^{i\frac{\pi}{8}} \int_0^\infty exp(-t^2 e^{i\frac{\pi}{4}})dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{8}} \int_0^\infty exp(-t^2 \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))dt$$

realizemos el siguiente cambio de variable $u = \dfrac{t}{\sqrt[4]{2}}$. Se tiene que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = e^{i\frac{\pi}{8}} \sqrt[4]{2} \int_0^\infty exp(-u^2(1+i))du = e^{i\frac{\pi}{8}} \sqrt[4]{2} \int_0^\infty exp(-u^2)exp(-u^2 i)du$$

$$= e^{i\frac{\pi}{8}} \sqrt[4]{2} \int_0^\infty exp(-u^2)[cos(u^2) - isin(u^2)]du$$

Ahora, sólo falta usar la ecuación del ángulo doble para obtener $e^{i\frac{\pi}{8}}$

Como

$$cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + cos(2\theta)}{2}}$$

$$sin(\theta) = \sqrt{\frac{1 - cos(2\theta)}{2}}$$

se tiene que

$$cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{1 + cos(\frac{\pi}{4})}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{1 - cos(\frac{\pi}{4})}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Luego las integrales calculadas quedan como

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}[\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}] = \int_0^\infty exp(-u^2)[cos(u^2) - isin(u^2)]du$$

Luego separando parte real e imaginaria se tiene que

$$\int_0^\infty exp(-u^2)cos(u^2)du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\int_0^\infty exp(-u^2)sin(u^2)du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

P4.- Considere $f(z) = e^{-z^2}$ y $b > 0$. Demuestre que

$$e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \int_0^\infty e^{-t^2}cos(2bt)dt$$

y

$$e^{-b^2}\int_0^b e^{t^2}dt = \int_0^\infty e^{-t^2}sin(2bt)dt$$

Demostración:

Como la función presentada $f(z)$ es Holomorfa en todo $\mathbb{C}$, la integral cerrada sobre cualquier curva cerrada simple regular por trozos será 0 de acuerdo al teorema de Goursat. Luego proponemos la siguiente curva para resolver este problema

$$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = t, t \in [0, R]\}$$

$$\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = R + it, t \in [0, b]\}$$

$$\Gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : z = t + ib, t \in [R, 0]\}$$

$$\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = it, t \in [b, 0]\}$$

donde el orden de los extremos de cada curva denota la orientación de tendrán. luego definiendo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. En vista del Teorema de Goursat, podemos reescribir la integral cerrada como

$$\int_0^R e^{-t^2}dt + \int_0^b e^{-(R+it)^2}idt + \int_R^0 e^{-(t+ib)^2}dt + \int_b^0 e^{t^2}idt = 0$$

Veamos que la 2da integral podemos hacerla converger a 0 si $R \longrightarrow \infty$.

$$|\int_0^b e^{-(R+it)^2}idt| = |\int_0^b e^{-R^2-2iRt+t^2}idt| \leq \int_0^b e^{-R^2-2iRt+t^2}e^{t^2}dt = e^{-R^2}\int_0^b e^{t^2}dt \longrightarrow 0$$

dado que es una integral en un intervalo finito de una función continua, y la Gaussiana se va a 0 en infinito. Luego el teorema de Goursat queda de la siguiente manera

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt + \int_\infty^0 e^{-(t+ib)^2}dt + \int_b^0 e^{t^2}idt = 0$$

Ahora trabajemos la 2da expresión

$$\int_\infty^0 e^{-(t+ib)^2}dt = \int_\infty^0 e^{-(t^2+2ibt-b^2)}dt = e^{b^2}\int_\infty^0 e^{-t^2-2ibt}dt$$

$$= e^{b^2}\int_\infty^0 e^{-t^2}[cos(2bt) - isin(2bt)]dt$$

Luego la integral de Goursat original puede ser reescrita como

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt + e^{b^2}\int_\infty^0 e^{-t^2}[cos(2bt) - isin(2bt)]dt + \int_b^0 e^{t^2}idt = 0$$

Ahora separamos en parte Real e Imaginaria

La parte Real queda como

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt - e^{b^2}\int_0^\infty e^{-t^2}cos(2bt)dt = 0$$

Mientras que la parte Imaginaria queda

$$e^{b^2}\int_0^\infty e^{-t^2}sin(2bt)dt - \int_0^b e^{t^2}dt = 0$$

donde multiplicando por e^{-b^2} a ambos lados de cada ecuación se llega a lo pedido.