Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto

Auxiliar 11 Pauta

26 de Octubre de 2022

P1.- Utilice la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z)^2}$$

integrado en un cuarto de circunferencia adecuado para demostrar que

a)

$$\int_0^\infty \frac{sin(t)}{(1+t)^2}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

b)

$$\int_0^\infty \frac{cos(t)}{(1+t)^2}dt + \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt = 1$$

Demostración:

Vemos que la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z)^2}$ es holomorfa en el cuadrante 1, por lo cual consideremos la siguiente parametrización de una curva cerrada simple de clase $\mathcal{C}^1$ por trozos

$$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = t, t \in [0, R]\}$$

$$\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{it}, t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

$$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = it, t \in [R, 0]\}$$

Luego por el Teorema de Goursat sabemos que esta integral cerrada deberá dar 0, dado que en la curva y el interior geométrico la función es holomorfa

$$\int_0^R \frac{e^{it}}{(1+t)^2}dt + \int_0^{2\pi} \frac{e^{iRcos(t)-Rsin(t)}}{(1+Re^{it})^2}Re^{it}idt + i\int_R^0 \frac{e^{-t}}{(1+it)^2}dt = 0$$

Estamos tentados a tomar el límite cuándo $R \longrightarrow \infty$ para obtener las integrales que buscamos. Recordemos que $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, por lo tanto $\frac{\sqrt{2}}{2} > sin(t) \geq 0$. Por lo tanto

$$0 \leq |\int_0^{2\pi} \frac{e^{iRcos(t)-Rsin(t)}}{(1+Re^{it})^2}Re^{it}idt| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-Rsin(t)}}{|1+Re^{it}|^2}Rdt \longrightarrow 0$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty \frac{e^{it}}{(1+t)^2}dt - i\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+it)^2}dt = 0$$

Ahora, para separar parte real e imaginaria debemos trabajar la seguda integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+it)^2}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-t^2+2it}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1-t^2)^2+4t^2}((1-t^2)-2it)dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-2t^2+t^2+4t^2}((1-t^2)-2it)dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+t^2)^2}((1-t^2)-2it)dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+t^2)^2}(1-t^2)dt - i\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+t^2)^2}2tdt$$

integrando por partes la segunda integral

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+t^2)^2}(1-t^2)dt - i[-\frac{e^{-t}}{(1+t^2)}|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt]$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+t^2)^2}(1-t^2)dt - i + i\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt$$

luego el teorema de Goursat sobre $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(1+z)^2}$ queda como

$$\int_0^\infty \frac{cos(t)}{(1+t)^2}dt + i\int_0^\infty \frac{sin(t)}{(1+t)^2}dt - i\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+t^2)^2}(1-t^2)dt - 1 + \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt = 0$$

Luego separando parte real e imaginaria se obtiene que

$$\int_0^\infty \frac{cos(t)}{(1+t)^2}dt - 1 + \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{sin(t)}{(1+t)^2}dt - \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+t^2)^2}(1-t^2)dt = 0$$

P2.- Utilice la función $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$ para calcular la siguiente integral

$$\int_0^{2\pi} e^{cos(\theta)}cos(sin(\theta))d\theta$$

Demostración:

Consideremos el disco unitario centrado en el origen. De acuerdo a la integral de Cauchy para la función $f(z)$, se tiene que esta posee una singularidad simple en $z = 0$, que se encuentra en el interior geométrico de la frontera de $D(0,1)$, por lo cual se tiene lo siguiente

$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i e^0$$

Ahora parametricemos la curva $z = e^{i\theta}$, por lo cual

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} i e^{i\theta} \frac{d\theta}{e^{i\theta}} = 2\pi i$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{cos(\theta)+isin(\theta)} d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{cos(\theta)} e^{isin(\theta)} d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{cos(\theta)}(cos(sin(\theta)) + isin(sin(\theta)))d\theta$$

Luego separando parte real de imaginaria

$$\int_0^{2\pi} e^{cos(\theta)} cos(sin(\theta)) = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} e^{cos(\theta)} sin(sin(\theta)) = 0$$

P3.- Usando integración en el plano complejo calcule

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{p^2 + m^2} d^3p$$

donde $\vec{r}$ corresponde a un vector fijo de $\mathbb{R}^3$

Demostración:

Lo primero es reordenar la integral en $\mathbb{R}^3$ de manera tal que quede algo similar a una integral que pueda ser resuelta mediante integrales complejas. Supongamos sin pérdida de generalidad que descompondremos el vector $\vec{p}$ en cordenadas esféricas donde el eje $\hat{z}$ apunte en la misma dirección que $\vec{r}$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{p^2 + m^2} d^3p = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{iprcos(\theta)}}{p^2 + m^2} p^2 sin(\theta) dp d\theta d\phi = 2\pi \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{iprcos(\theta)}}{p^2 + m^2} p^2 sin(\theta) dp d\theta$$

usemos Fubbini para integrar la variable θ

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{p^2}{p^2 + m^2} [\int_0^{\pi} e^{iprcos(\theta)} sin(\theta) d\theta] dp = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{p^2}{p^2 + m^2} [\frac{e^{irpcos(\theta)}|_0^{\pi}}{irp}] dp$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{p^2}{p^2+m^2}[\frac{e^{-irp}-e^{irp}}{irp}]dp = 2\pi \int_0^\infty \frac{p^2}{p^2+m^2}[\frac{2sin(rp)}{rp}]dp = \frac{4\pi}{r}\int_0^\infty \frac{sin(rp)p}{p^2+m^2}dp$$

Consideremos la siguiente integral compleja

$$\int_\Gamma \frac{ze^{irz}}{z^2+m^2}dz$$

donde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = t, t \in [-R, R]\}$$

$$\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{it}, t \in [0, \pi]\}$$

Luego

$$\int_\Gamma \frac{ze^{irz}}{z^2+m^2}dz = \int_{-R}^R \frac{te^{irt}}{t^2+m^2}dt + \int_0^\pi \frac{R^2e^{2irt}}{R^2+m^2}e^{iRrcos(t)}e^{-Rrsin(t)}dt$$

Lo primero que hay que notar, es que para R suficientemente grande, la función tendrá una singularidad en $z = im$, por lo cual podremos utilizar el resultado de la integral de Cauchy, dado que

$$\frac{ze^{irz}}{z^2+m^2} = \frac{ze^{irz}/(z+im)}{(z-im)}$$

Lo segundo es que al tomar el límite de $R \longrightarrow \infty$, la segunda integral converge a 0

$$0 \leq |\int_0^\pi \frac{R^2e^{2irt}}{R^2+m^2}e^{iRrcos(t)}e^{-Rrsin(t)}dt| \leq \frac{R^2}{R^2+m^2}\int_0^\pi e^{-Rrsin(t)}dt \longrightarrow 0$$

dado que la constante que está afuera de laintegral siempre se mantiene acotada y es continua en R ($0 \leq \frac{R^2}{R^2+m^2} \leq 1$ y $R, r > 0$) y $sin(t) \geq 0$ para $t \in [0, \pi]$, por lo que el integrando se va a 0. Ahora se tiene que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{te^{irt}}{t^2+m^2}dt = 2\pi i\frac{ze^{irz}}{(z+im)}|_{z=im} = 2\pi i\frac{ime^{-rm}}{2im} = i\pi e^{-rm}$$

Luego separando en parte real e imaginaria, vemos que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{tcos(rt)}{t^2+m^2}dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{tsin(rt)}{t^2+m^2}dt = \pi e^{-rm}$$

La parte real es esperabe, dado que es una función impar, y el resultado de la parte imaginaria, podemos usar laparidad de esta integral para replantearla como

$$\int_0^\infty \frac{tsin(rt)}{t^2+m^2}dt = \frac{\pi}{2}e^{-rm}$$

Luego, podemos unir esto a la integral original

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{p^2+m^2}d^3p =' \frac{2\pi^2}{r}e^{-rm}$$

que corresponde al mismo tipo de decaimiento del potencal de Yukawa.