Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto

Auxiliar 8 Pauta

05 de Octubre de 2022

P1.- Sea Ω abierto conexo en $\mathbb{C}$ no vacío. Considere las representaciones cartesianas y polares de los números complejos $z = x + iy = re^{i\theta}$

a) Justifique que para una función continua

$$f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$$

es posible representar

$$\hat{u}(x, y) = u(r, \theta)$$

$$\hat{v}(x, y) = v(r, \theta)$$

Demostración:

Como el plano complejo $\mathbb{C}$ es isomorfo isométrico al plano $\mathbb{R}^2$, las coordenadas polares generan un mapeo bien definido de este, por lo tanto es posible identificar todo punto de $\mathbb{R}^2$ en coordenadas cilíndricas mediante

$$x = rcos(\theta)$$

$$y = rsin(\theta)$$

y por tanto el plano complejo $\mathbb{C}$ queda bien definido.

b) Demuestre que $f(z) \in H(\Omega)$ si y sólo si

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\partial_\theta v = \partial_r u \\ \frac{1}{r}\partial_\theta u = -\partial_r v \end{cases}$$

Demostración:

$\Longrightarrow$

Como existe una identificación de las funciones holomorfas, donde $f(z) \in H(C)$ ssi es una fución Frechet-derivable y cumple las cundiciones de Cauchy-Riemann

$$\partial_x \hat{u} = \partial_y \hat{v}$$

$$\partial_x \hat{v} = -\partial_y \hat{u}$$

Veamos la primera ecuación

$$\frac{1}{r}\partial_\theta v(r,\theta) = \frac{1}{r}\partial_\theta \hat{v}(rcos(\theta), rsin(\theta)) = \frac{1}{r}[-r\partial_x \hat{v}(rcos(\theta), rsin(\theta))sin(\theta) + r\partial_y \hat{v}(rcos(\theta), rsin(\theta))cos(\theta)]$$

resultado obtenido de aplicar la regla de la cadena. luego, como $f(z)$ es holomorfa, en particular cumple las condiciones de Cauchy-Riemann

$$= \partial_y \hat{u}(rcos(\theta), rsin(\theta))sin(\theta) + \partial_x \hat{u}(rcos(\theta), rsin(\theta))cos(\theta) = \partial_r \hat{u}(rcos(\theta), rsin(\theta)) = \partial_r u(r,\theta)$$

de donde reconocemos la regla de la cadena aplicada sobre u. Realicemos el procedimiento similar para la segunda ecuación

$$\frac{1}{r}\partial_\theta u(r,\theta) = \frac{1}{r}\partial_\theta \hat{u}(rcos(\theta), rsin(\theta)) = \frac{1}{r}[-r\partial_x \hat{u}(rcos(\theta), rsin(\theta))sin(\theta) + r\partial_y \hat{u}(rcos(\theta), rsin(\theta))cos(\theta)]$$

obtenido nuevamente aplicando regla de la cadena. Luego, como $f(z)$ cumple Cauchy-Riemann

$$= -\partial_y \hat{v}(rcos(\theta), rsin(\theta))sin(\theta) - \partial_x \hat{v}(rcos(\theta), rsin(\theta))cos(\theta) = -\partial_r \hat{v}(rcos(\theta), rsin(\theta)) = -\partial_r v(r,\theta)$$

Luego cumple las condiciones de Cauchy-Riemann polares.

$\Longleftarrow$

De las ecuaciones anteriores si se cumplen la igualdad de derivadas parciales entonces se tiene que

$$-\partial_x \hat{v} sin(\theta) + partial_y \hat{v} cos(\theta) = \partial_y \hat{u} sin(\theta) + \partial_x \hat{u} cos(\theta)$$

y que

$$-\partial_y \hat{v} sin(\theta) - \partial_x \hat{v} cos(\theta) = -\partial_x \hat{u} sin(\theta) + \partial_y \hat{u} cos(\theta)]$$

Multimplicando por $sin(\theta)$, la segunda $cos(\theta)$, y sumando se obtiene

$$-\partial_x \hat{v} = \partial_y \hat{u}$$

Ahora, multiplicando la primera por $cos(\theta)$, la segunda por $sin(\theta)$ y restandole la segunda a la primera se obtiene

$$\partial_y \hat{v} = \partial_x \hat{u}$$

Luego, $f(z)$ cumple las condiciones de Cauchy-Riemann. para ver que es una función Frechet-derivable basta ver que las derivadas parciales son continuas, luego $f(z)$ es holomorfa

c) Demuestre que si $f(z) \in H(\Omega)$ entonces

$$f^{'}(z) = (\partial_r u + i\partial_r v)e^{-i\theta}$$

Demostración:

Sabemos que

$$f^{'}(z) = \partial_x u + i\partial_x v$$

Usaremos la regla de la cadena sobre las derivadas respecto a r

$$(\partial_r u + i\partial_r v)e^{-i\theta} = [\partial_x \hat{u} cos(\theta) + \partial_y \hat{u} sin(\theta) + i(\partial_x \hat{v} cos(\theta) + \partial_y \hat{v} sin(\theta))][cos(\theta) - isin(\theta)]$$

$$= \partial_x \hat{u} cos(\theta)^2 + \partial_y \hat{u} cos(\theta)sin(\theta) + \partial_x \hat{v} cos(\theta)sin(\theta) + \partial_y \hat{v} sin(\theta)^2$$

$$+i(-\partial_x \hat{u} cos(\theta)sin(\theta) - \partial_y \hat{u} sin(\theta)^2 + \partial_x \hat{v} cos(\theta)^2 + \partial_y \hat{v} sin(\theta)cos(\theta))$$

luego usando las condiciones de Cauchy-Riemann

$$= \partial_x \hat{u} cos(\theta)^2 + \partial_y \hat{u} cos(\theta)sin(\theta) - \partial_y \hat{u} cos(\theta)sin(\theta) + \partial_x \hat{u} sin(\theta)^2$$

$$+i(-\partial_y \hat{v} cos(\theta)sin(\theta) + \partial_x \hat{v} sin(\theta)^2 + \partial_x \hat{v} cos(\theta)^2 + \partial_y \hat{v} sin(\theta)cos(\theta))$$

$$= \partial_x \hat{u} + i\partial_x \hat{v} = f^{'}(z)$$

demostrando lo pedido.

[Nota:]

Hay que recordar que las condiciones de Cauchy-Riemann por si solas son un poco más débiles que la holomorfía de las funciones. Hay funciones que sin ser continuas cumplen las cundiciones de Cauchy-Riemann en algún punto. En general hasta ahora se ha trabajado con funciones que poseen una derivada continua, por eso es más facil justificar mediante CR la holomorfía de las funciones.

P2.- Considere los siguientes operadores diferenciales

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

a) Pruebe que para una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida sobre un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ satisface las condiciones de CR si y sólo si $\partial_{\bar{z}} f = 0$

Demostración:

$\Longrightarrow$

Supongamos que $f(z)$ satisface las condiciones de CR. Ahora apliquemos el operador $\partial_{\bar{z}}$ a $f(z)$

$$\partial_{\bar{z}} f(z) = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = \frac{1}{2}[\partial_x u - \partial_y v + i(\partial_x v + \partial_y u)]$$

Pero $f(z)$ cumple las condiciones de CR, por lo tanto

$$\partial_x u = \partial_y v$$

$$\partial_x v = -\partial_y u$$

Luego tanto la parte real como la imaginaria del cáalculo anterior son nulas.

$\Longleftarrow$

Supongamos que $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$. De acuerdo a los calculos anteriores se tiene que

$$\frac{1}{2}[\partial_x u - \partial_y v + i(\partial_x v + \partial_y u)] = 0$$

donde u y v son funciones de valores reales. Luego tanto la parte real como la imaginaria del resultado anterior deben ser nulas, ya que las derivadas de $f(z)$ también podrán ser descumpuestas en parte real e imaginaria

$$\partial_x u - \partial_y v = 0$$

$$\partial_x v + \partial_y u = 0$$

teniéndose las condiciones de CR.

b) Si $f \in H(\Omega)$ entonces $\forall z \in \Omega, \quad f^{'}(z) = \partial_z f(z)$

Demostración:

Calculemos explícitamente el lado derecho

$$\partial_z f(z) = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u + iv) = \frac{1}{2}[\partial_x u + \partial_y v + i(\partial_x v - \partial_y u)] = \frac{1}{2}[2\partial_x u + 2i\partial_x v] = \partial_x u + i\partial_x v = f^{'}(z)$$

dado que $f(z)$ cumple las condiciones de CR.

c) ¿A qué corresponde $\partial_z \partial_{\bar{z}} f = 0$? Explicite en términos de u y v

Demostración:

Expresemos el operador completo

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{4}(\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y) f = \frac{1}{4}(\partial_{xx} + \partial_{yy}) f$$

$$= \frac{1}{4}(\partial_{xx} + \partial_{yy}) u + \frac{i}{4}(\partial_{xx} + \partial_{yy}) v = \frac{1}{4} \triangle f = 0$$

que corresponde a la ecuación de Poisson sin fuente para los campos escalares u y v.

d) Definimos el operador Laplaciano sobre una función a valores complejos como

$$\triangle f = \triangle u + i \triangle v$$

Si $\triangle f = 0$ se dirá que f es armónica (i.e. tanto la parte real como imaginaria son armónicas). Muestre que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas

Demostración:

$\Longrightarrow$

Calculemos cada una de las derivadas. Primero veamos si $f(z)$ es armónica

$$\triangle f = (\partial_x \partial_x u + \partial_y \partial_y u) + i(\partial_x \partial_x v + \partial_y \partial_y v) = (\partial_x \partial_y v - \partial_y \partial_x v) + i(-\partial_x \partial_y u + \partial_y \partial_x u) = 0$$

dado que como $f(z)$ es holomorfa, en particular cumple las condiciones de CR. Lo anterior es posible gracias a que las derivadas respecto a x e y pueden conmutar.

Veamos que ocurre con $zf(z)$

$$\partial_x[zf(z)] = \partial_x[(x+iy)(u+iv)] = \partial_x[xu - yv + i(yu + xv)] = u + x\partial_x u - y\partial_x v + i(y\partial_x u + v + x\partial_x v + v)$$

luego

$$\partial_{xx}[zf(z)] = 2\partial_x u + x\partial_{xx} u - y\partial_{xx} v + i(y\partial_{xx} u + 2\partial_x v + x\partial_{xx} v)$$

Ahora vemos las derivadas respecto a y

$$\partial_y[zf(z)] = \partial_y[(x+iy)(u+iv)] = \partial_y[xu - yv + i(yu + xv)] = x\partial_y u - v - y\partial_y v + i(y\partial_y u + u + x\partial_y v)$$

luego

$$\partial_{yy}[zf(z)] = x\partial_{yy} u - 2\partial_y v - y\partial_{yy} v + i(2\partial_y u + y\partial_{yy} u + x\partial_{yy} v)$$

Juntando ambos los resultados

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy})[zf(z)] = x\triangle u + 2(\partial_x u - \partial_y v) - y\triangle v + i(2(\partial_y u + \partial_x v) + y\triangle u + x\triangle v)$$

pero como

$$\triangle f(z) = \triangle u + i\triangle v = 0$$

se tiene que

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy})[zf(z)] = 2(\partial_x u - \partial_y v) + 2i(\partial_y u + \partial_x v)$$

pero $f(z)$ cumple CR, por lo cual el resultado anterior es nulo.

$\Longleftarrow$

Se sabe por hipótesis que

$$\triangle f(z) = \triangle u + i\triangle v = 0$$

Luego, por los cálculos anteriores se tiene que, usando la hipótesis anterior

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy})[zf(z)] = 2(\partial_x u - \partial_y v) + 2i(\partial_y u + \partial_x v) = 0$$

Luego, como u y v son funciones a valores reales, en el caso anterior está bien definida la descomposición en parte real e imaginaria. luego

$$\partial_x u - \partial_y v = 0$$

$$\partial_y u + \partial_x v = 0$$

que corresponde a las condiciones de CR.