

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto



Auxiliar 8

05 de Octubre de 2022

P1.- Sea Ω abierto conexo en $\mathbb{C}$ no vacío. Considere las representaciones cartesianas y polares de los números complejos $z = x + iy = re^{i\theta}$

a) Justifique que para una función continua

$$f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$$

es posible representar

$$\hat{u}(x, y) = u(r, \theta)$$

$$\hat{v}(x, y) = v(r, \theta)$$

b) Demuestre que $f(z) \in H(\Omega)$ si y sólo si

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \partial_{\theta} v = \partial_r u \\ \frac{1}{r} \partial_{\theta} u = -\partial_r v \end{cases}$$

c) Demuestre que si $f(z) \in H(\Omega)$ entonces

$$f'(z) = (\partial_r u + i\partial_r v)e^{-i\theta}$$

P2.- Considere los siguientes operadores diferenciales

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

a) Pruebe que para una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida sobre un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ satisface las condiciones de CR si y sólo si $\partial_{\bar{z}} f = 0$

b) Si $f \in H(\Omega)$ entonces $\forall z \in \Omega f'(z) = \partial_z f(z)$

c) ¿A qué corresponde $\partial_z \partial_{\bar{z}} f = 0$? Explícite en términos de u y v

d) Definimos el operador Laplaciano sobre una función a valores complejos como

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v$$

si $\Delta f = 0$ se dirá que f es armónica.

Muestre que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas