Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto

Auxiliar 6 Pauta

21 de Septiembre de 2022

P1.- Suponga que usted está trabajando en el área de ingeniería hidráulica para establecer el campo de velocidades de un flujo generado por un sistema de fuentes, y obtiene el siguiente resultado para $\vec{v}$ expresado en coordenadas cilíndricas

$$\vec{v}(\rho,\phi,z) = \rho e^{-\alpha\rho}e^{-\lambda z^2}\hat{\phi} + \varepsilon z e^{-\beta z^2}e^{-\gamma\rho^2}\hat{z}$$

donde $\alpha, \lambda, \beta\gamma > 0$, $\varepsilon \geq 0$ y $x \in R^3$

a) Calcule el rotor de este campo vectorial. En Mecánica de Fluidos, el rotor del campo de velocidades se le denomina $\vec{\omega}$ vorticidad, que da cuenta como el campo de velocidades rota en torno a los ejes que este presenta. ¿Qué interpretación entonces tendría el cálculo anterior? ¿Es un campo conservativo?

Demostración:

Recordemos que forma adopta el rotor en cilíndricas para un campo vectorial $\vec{G}$

$$\nabla\times\vec{G} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{z} \\ \partial_\rho & \partial_\phi & \partial_z \\ G_\rho & \rho G_\phi & G_z \end{vmatrix}$$

por tanto aplicando esto al campo de velocidades $\vec{v}$ se tiene que

$$\nabla\times\vec{v} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{z} \\ \partial_\rho & \partial_\phi & \partial_z \\ 0 & \rho^2 e^{-\alpha\rho}e^{-\lambda z^2} & \varepsilon z e^{-\beta z^2}e^{-\gamma\rho^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho}[\hat{\rho}(\partial_\phi(\varepsilon z e^{-\beta z^2}e^{-\gamma\rho^2}) - \partial_z(\rho^2 e^{-\alpha\rho}e^{-\lambda z^2})) \quad + \quad \rho\hat{\phi}(\partial_z(0) - \partial_\rho(\varepsilon z e^{-\beta z^2}e^{-\gamma\rho^2})$$

$$+ \quad \hat{z}(\partial_\rho(\rho^2 e^{-\alpha\rho}e^{-\lambda z^2}) - \partial_\phi(0)))]$$

$$= \frac{1}{\rho}[2\lambda z\rho^2 e^{-\alpha\rho}e^{-\lambda z^2}\hat{\rho} + 2\gamma\rho^2\varepsilon z e^{-\beta z^2}e^{-\gamma\rho^2}\hat{\phi} + (2\rho e^{-\alpha\rho}e^{-\lambda z^2} - \alpha\rho^2 e^{-\alpha\rho}e^{-\lambda z^2})\hat{z}]$$

$$= 2\lambda z\rho e^{-\alpha\rho}e^{-\lambda z^2}\hat{\rho} + 2\gamma\rho\varepsilon z e^{-\beta z^2}e^{-\gamma\rho^2}\hat{\phi} + (2e^{-\alpha\rho}e^{-\lambda z^2} - \alpha\rho e^{-\alpha\rho}e^{-\lambda z^2})\hat{z}$$

Vemos que el rotor presenta las 3 componentes no nulas, lo que significa que el campo de velocidades es capaz de rotar en torno a los 3 ejes cilíndricos. Si $\varepsilon = 0$, el campo sólo rotaría en torno a la dirección radial y la componente vertival, esta última dada solamente porque el mismo campo depende de la coordenada z.

b) Calcule la circulación a través de las siguientes curvas simples

$$\Gamma_1 = \{\rho = R, \phi \in [0, 2\pi], z = h\}$$

$$\Gamma_2 = \{\rho \in [0, R], \phi = 0, z = 0\} \cup \{\rho = R, \phi = 0, z \in [0, h]\}$$

$$\cup\{\rho \in [0, R], \phi = 0, z = h\} \cup \{\rho = 0, \phi = 0, z \in [0, h]\}$$

¿Qué ocurre si $h \longrightarrow \infty$ y $R \longrightarrow \infty$? ¿Qué significan estos resultados?

Demostración:

Calculemos la primera integral de circulación. Vemos que es un circulo, por tanto su parametrización es tal que $d\vec{r} = \hat{\phi} R d\phi$, por lo tanto la única componente que interviene n este cálculo de flujo es la componente $\hat{\phi}$ del campo de velocidades

Luego

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} [Re^{-\alpha R} e^{-\lambda h^2} \hat{\phi} + \varepsilon h e^{-\beta h^2} e^{-\gamma R^2} \hat{z}] \cdot \hat{\phi} R d\phi = \int_0^{2\pi} R^2 e^{-\alpha R} e^{-\lambda h^2} d\phi$$

$$= 2\pi R^2 e^{-\alpha R} e^{-\lambda h^2}$$

En este caso, si $h \longrightarrow \infty$ o $R \longrightarrow \infty$, la circulación se anula dado que $\alpha, \gamma > 0$, por lo tanto no hay circulación en infinito, lo que implica que muy lejos del origen el campo de velocidades se aprecia estático para curvas cerradas. Otra interpretación válida es que, desde el punto de vista del teorema de Stokes, para una curva cerrada muy lejos del origen, el campo no rota en torno a esta curva cerrada.

Para la segunda integral de circulación, notemos que la parametrización del cuadrado notaque los segmentos

$$S_1 = \{\rho \in [0, R], \phi = 0, z = 0\}$$

$$S_2 = \{\rho \in [0, R], \phi = 0, z = h\}$$

poseen un diferencial de linea de la forma $d\vec{R} = \hat{\rho} d\rho$, por lo cual no tendrán ninguna participación en la integral de circulación, ya que son ortogonales al capo de velocidades. Luego vemos que para las secciones

$$T_1 = \{\rho = R, \phi = 0, z \in [0, h]\}$$

$$T_2 = \{\rho = 0, \phi = 0, z \in [0, h]\}$$

luego estos poseen diferencial de linea $d\vec{r} = \hat{z}dz$

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_{T_1} \vec{v}\cdot d\vec{r} + \int_{T_2} \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_0^h [Re^{-\alpha R}e^{-\lambda z^2}\hat{\phi} + \varepsilon z e^{-\beta z^2}e^{-\gamma R^2}\hat{z}]\cdot \hat{z}dz$$

$$+\int_h^0 [0e^{-\alpha 0}e^{-\lambda z^2}\hat{\phi} + \varepsilon z e^{-\beta z^2}e^{-\gamma 0}\hat{z}]\cdot \hat{z}dz = \int_0^h \varepsilon z e^{-\beta z^2}e^{-\gamma R^2}dz + \int_h^0 \varepsilon z e^{-\beta z^2}dz$$

$$= \frac{\varepsilon}{-2\beta}e^{-\gamma R^2}\int_0^h -2\beta z e^{-\beta z^2}dz + \frac{\varepsilon}{-2\beta}\int_h^0 -2\beta z e^{-\beta z^2}dz = \frac{\varepsilon}{-2\beta}e^{-\gamma R^2}e^{-\beta z^2}|_0^h + \frac{\varepsilon}{-2\beta}e^{-\beta z^2}|_h^0$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\beta}(1-e^{-\beta h^2})(e^{-\gamma R^2}-1)$$

Ahora, si $h \longrightarrow \infty$ y $R \longrightarrow \infty$ este resultado no converge a 0, luego por muy grande que se time este cuadrado con una arista en el eje $\hat{z}$, siempre existirá circulación, o que en torno a las aristas de este cuadrado de area infinitamente grande siempre existe rotor no nulo, por lo tanto el campo sigue rotando en torno a las aristas de este cuadrado. Algo parece peculiar sobre este campo de velocidades desde el punto de vista intuitivo.

c) Calcule la divergencia de este campo.

Demostración:

Recordemos como calcular la divergencia en coordenadas cilíndricas para un campo vectorial $\vec{G}$

$$\nabla\cdot\vec{G} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho G_\rho) + \frac{1}{\rho}\partial_\phi(G_\phi) + \partial_z(G_z)$$

Luego aplicandolo al campo de velocidades descrito, se tiene que

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho 0) + \frac{1}{\rho}\partial_\phi(\rho e^{-\alpha\rho}e^{-\lambda z^2}) + \partial_z(\varepsilon z e^{-\beta z^2}e^{-\gamma\rho^2}) = \varepsilon e^{-\gamma\rho^2}(1-2\beta z^2)e^{-\beta z^2}$$

Luego la única componente que aporta a la divergencia es la componente $\hat{z}$ del campo de velocidades

d) Calcule el flujo que pasa a través de la superficie de un cilindro de radio $\rho = R$ y $z = h$. ¿Se cumple la ley de Gauss en este caso?

Demostración:

Vemos que dada la parametrización del cilindro, su superficie Σ podemos describirla mediante estas 3 parametrizaciones

$$\sigma_1 = \{\rho\in[0,R], \phi\in[0,2\pi], z = h, \hat{n} = \hat{z}\}$$

$$\sigma_2 = \{\rho\in[0,R], \phi\in[0,2\pi], z = 0, \hat{n} = -\hat{z}\}$$

$$\sigma_3 = \{\rho = R, \phi \in [0, 2\pi], z \in [0, h], \hat{n} = \hat{\rho}\}$$

donde

$$\Sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$$

Luego dado que $\vec{v}$ no posee componente radial, los flujos que se deben calcular sólo corresponden a los que atraviesan la tapas

$$\oiint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_{\sigma_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \iint_{\sigma_2} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} [\rho e^{-\alpha\rho} e^{-\lambda h^2} \hat{\phi} + \varepsilon h e^{-\beta h^2} e^{-\gamma\rho^2} \hat{z}] \cdot \hat{z} \rho d\phi d\rho$$

$$+ \int_0^R \int_0^{2\pi} [\rho e^{-\alpha\rho} \hat{\phi} + \varepsilon 0 e^{-\gamma\rho^2} \hat{z}] \cdot -\hat{z} \rho d\phi d\rho = \varepsilon h e^{-\beta h^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho e^{-\gamma\rho^2} d\phi d\rho$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon h e^{-\beta h^2}}{-2\gamma} \int_0^R -2\gamma\rho e^{-\gamma\rho^2} d\rho = \frac{2\pi\varepsilon h e^{-\beta h^2}}{-2\gamma} e^{-\gamma\rho^2}|_0^R = \frac{\pi\varepsilon h e^{-\beta h^2}}{\gamma}(1 - e^{-\gamma R^2})$$

Ahora veamos si se cumple el teorema de Gauss para este campo calculando la integral de volumen para la divergencia

$$\iiint_{cilindro} \nabla \cdot \vec{v} dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \varepsilon e^{-\gamma\rho^2} (1 - 2\beta z^2) e^{-\beta z^2} \rho dz d\phi d\rho$$

$$= \varepsilon \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h e^{-\gamma\rho^2} e^{-\beta z^2} \rho dz d\phi d\rho - 2\beta\varepsilon \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h e^{-\gamma\rho^2} z^2 e^{-\beta z^2} \rho dz d\phi d\rho$$

$$= \frac{\pi\varepsilon}{\gamma}(1 - e^{-\gamma R^2}) \int_0^h e^{-\beta z^2} dz - \frac{2\pi\varepsilon\beta}{\gamma}(1 - e^{-\gamma R^2}) \int_0^h z^2 e^{-\beta z^2} dz$$

La segunda integral la integraremos por partes tomando $u = z$ y $dv = -2\beta z e^{-\beta z^2} dz$, obteniéndose que

$$= \frac{\pi\varepsilon}{\gamma}(1 - e^{-\gamma R^2}) \int_0^h e^{-\beta z^2} dz + \frac{\pi\varepsilon}{\gamma}(1 - e^{-\gamma R^2})[z e^{-\beta z^2}|_0^h - \int_0^h e^{-\beta z^2} dz]$$

luego renombrando

$$I = \int_0^h e^{-\beta z^2} dz$$

se tiene que

$$= \frac{\pi\varepsilon}{\gamma}(1-e^{-\gamma R^2})I + \frac{\pi\varepsilon}{\gamma}(1-e^{-\gamma R^2})[he^{-\beta h^2} - I] = \frac{\pi\varepsilon}{\gamma}(1-e^{-\gamma R^2})I + \frac{\pi\varepsilon}{\gamma}(1-e^{-\gamma R^2})he^{-\beta h^2} - \frac{\pi\varepsilon}{\gamma}(1-e^{-\gamma R^2})I$$

$$= \frac{\pi\varepsilon}{\gamma}(1 - e^{-\gamma R^2})he^{-\beta h^2}$$

cumpliéndose el teorema de Gauss para este campo. Esto era esperable dado que $\vec{v}$ es un campo clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$.

e) Ahora, se sabe de Mecánica de Fluidos, que para un flujo incompresible (por ejemplo un fluido que tenga densidad constante uniforme) que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. ¿Cómo cambian las respuestas anteriores con esta nueva información? ¿debería ocurrir con la constante ε?

Demostración:

Como $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, y se tiene que $\alpha, \beta, \gamma > 0$, la única constante que interfiese con ese resultado es ε que debe ser nula. Dado lo anterior, el flujo calculado en d) será también nulo.

La interpretación en este caso es que, dado que el campo no puede diverger, entonces en cualquier volumen que pueda ser encerrado por una superficie regular por trozos no debe acumularse fluido. Esto no era claro si es que $\varepsilon \neq 0$.

Además, si $\varepsilon = 0$, entonces la circulación calculada a través del cuadrado calculada en b) es nula y el campo no rotará en torno del eje $\hat{\phi}$.