Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto

Auxiliar 7 Pauta

28 de Septiembre de 2022

P1.- Sea $\vec{r} = (x, y, z)$, con $r = ||\vec{r}||$ y las siguientes superficies $\Sigma = \partial\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : a \leq r \leq b\}$ orientada exteriormente

Sean $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ ambas de forma tal que

$$\vec{F}(x, y, z) = f(r^2)\vec{r}$$

a) Demuestre que

$$r^2 div(\vec{F}) = \frac{d}{dr}(r^3 f(r^2))$$

Demostración:

Dada la simetría del campo escalar y la definición del vector posición, en coordenadas esféricas es mucho más simple calcular la divergencia, dado que

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r^2)r\hat{r}$$

Luego, sabiendo que para un campo vectorial $\vec{G}$ la divergencia se puede calcular como

$$\nabla \cdot \vec{G} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 G_r) + \frac{1}{rsin(\theta)}\partial_\theta(sin(\theta)G_\theta) + \frac{1}{rsin(\theta)}\partial_\phi(G_\phi)$$

Luego aplicado para el campo $\vec{F}$ que posee simetría esferica (posee coordenadas nulas en $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$), se tiene que

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r(f(r^2)r^3)$$

luego multiplicando la ecuación por r^2 a ambos lados se tiene que

$$r^2\nabla \cdot \vec{F} = \partial_r(f(r^2)r^3)$$

b) Verifique que

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi(b^3 f(b^2) - a^3 f(a^2))$$

Demostración:

Como Σ corresponde a una supericie disconexa correspondiente a 2 casquetes esféricos concentricos de radios a y b, por tanto existe un volumen conexo entre ambas superficies, los campos vectorial $\vec{F}$ y escalar f son $\mathcal{C}^2$, entonces es posible utilizar el teorema de la divergencia, por lo tanto

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{r^2} \partial_r (r^3 f(r^2)) r^2 sin(\theta) d\phi d\theta dr = 4\pi \int_a^b \partial_r (r^3 f(r^2)) dr$$

Luego por T.F.C., se llega a que

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi (b^3 f(b^2) - a^3 f(a^2))$$

obteniéndose lo pedido.

c) Sea Γ una curva regular por trozos con extremos $\mathcal{O} = (0,0,0)$ y $\mathcal{A} = (0,0,a)$ recorrida desde $\mathcal{O}$ hasta $\mathcal{A}$ demuestre que

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} f(t) dt$$

Demostración:

Como Γ es una curva regular por trozos podemos cerrar los extremos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{O}$ a través del eje $\hat{z}$. Luego nuevamente como $\vec{F}$ es $\mathcal{C}^2$ y la nueva curva cerrada es regular por trozos, por lo cual genera una superficie orientable. Luego podemos utilizar el teorema de Stokes. Denotemos la nueva curva cerrada $\bar{\Gamma}$ y S su interior geométrico

$$\int_{\bar{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Luego, en esféricas, el rotor para un campo vectorial $\vec{G}$ está dado por

$$\nabla \times \vec{G} = \frac{1}{r^2 sin(\theta)} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & rsin(\theta)\hat{\phi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ G_r & rG_\theta & rsin(\theta)G_\phi \end{vmatrix}$$

Luego aplicado al aplicarlo al campo $\vec{F}$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 sin(\theta)} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & rsin(\theta)\hat{\phi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ rf(r^2) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Luego parametrizando el trozo de eje que une los extremos de Γ mediante $\vec{r} = z\hat{z}$, se tiene que

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_a^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_a^0 zf(z^2)\hat{z} \cdot \hat{z} d\vec{z} = 0$$

es posible hacerel cambio de variable $t = z^2$, entonces $dt = 2zdz$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{2} \int_{a^2}^{0} f(t)dt = \frac{1}{2} \int_{0}^{a^2} f(t)dt$$

P2.- Sea Ω un abierto acotado en $\mathbb{R}^3$ y sea u una función $\mathcal{C}^2$ que satisface

$$\begin{cases} \triangle u = f, \text{en } \Omega \\ \nabla u \cdot \hat{n} = g, \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

a) Demuestre que para toda función v de clase $\mathcal{C}^1$ se tiene que

$$\iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV = \iint_{\partial\Omega} gvdA - \iiint_{\Omega} fvdV$$

Demostración:

Reconrdemos que para un campo escalar u, se tiene que $\triangle u = \nabla \cdot \nabla u$

Ahora, tomando a ecuación de la EDP, multiplicando por v una función de clase $\mathcal{C}^1$ e integrando en el dominio Ω, se tiene que

$$\iiint_{\Omega} \triangle uvdV = \iiint_{\Omega} fvdV$$

Luego, esto es posible reescribirlo como

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \nabla u \quad vdV = \iiint_{\Omega} f \quad vdV$$

Luego realizando integración por partes en 3 dimensiones (lo cual podemos hacer dado que v es una función clase $\mathcal{C}^1$), se tiene que

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u)vdV = \iint_{\partial\Omega} \nabla uv \cdot d\vec{S} - \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla vdV = \iint_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \hat{n}dA - \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla vdV$$

Pero la condición de borde del problema original indica que $\nabla u \cdot \hat{n} = g, \text{en } \partial\Omega$, luego

$$\iint_{\partial\Omega} vgdA - \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla vdV = \iiint_{\Omega} fvdV$$

Luego reordenando los términos

$$\iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla vdV = \iint_{\partial\Omega} v \quad gdA - \iiint_{\Omega} f \quad vdV$$

Otra manera de proceder es notar que

$$\nabla \cdot (v\nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v\triangle u$$

por lo tanto integrando sobre el dominio Ω se tiene que

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot (v\nabla u)dV = \iiint_\Omega v\triangle udV + \iiint_\Omega \nabla v \cdot \nabla udV$$

donde en el término de la izquierda es posible aplicar el teorema de Gauss

$$\iiint_\Omega v\triangle udV = \iiint_\Omega \nabla \cdot (v\nabla u)dV - \iiint_\Omega \nabla v \cdot \nabla udV = \iint_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \hat{n}dA - \iiint_\Omega \nabla v \cdot \nabla udV$$

y usando la condición de borde

$$= \iint_{\partial\Omega} vgdA - \iiint_\Omega \nabla v \cdot \nabla udV = \iiint_\Omega f \quad vdV$$

b) Suponga que Ω es un abierto cuya adherencia no intersecta con el plano YZ. Demuestre que

$$\iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}dV = -|\Omega|$$

Para funciones f y g adecuadas.

Demostración:

Considerando la expresión calculada e a), vemos que no exite término de superficie, imponemos que $g = 0$.

Además como del product escalar entre ∇u y ∇v solo sobrevive el término con derivada en x, entonces podemos escoger $v(x, y, z) = x$, que es una función clase $\mathcal{C}^2$, obteniéndose que $\nabla v = 1\hat{x}$.

Ahora, para poder obtener el volumen en el lado derecho de la expresión, y dado que el conjunto Ω no intersecta el plano YZ, podemos escoger $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x}$ que será una función bien definida sobre Ω.

Reemplazando las funciones encontradas en la expresión de a) se llega a lo pedido.

$$\iiint_\Omega \nabla u \cdot \nabla vdV = \iiint_\Omega \partial_x udV = \iint_{\partial\Omega} v \quad gdA - \iiint_\Omega f \quad vdV$$

$$= \iint_{\partial\Omega} 0dA - \iiint_\Omega x \quad \frac{1}{x}dV = -\iiint_\Omega dV = -|\Omega|$$

P3.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto conexo no vacío. Sea $\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo vectorial y $g : \Omega \longrightarrow R$ campo escalar ambos de clase $\mathcal{C}^1$. Puebe que si $S \cup \partial S \subseteq \Omega$ es tal que S es una superficie regular por trozos, entonces

$$\iint_S g \quad rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} g\vec{F} \cdot d\vec{r} - \iint_S \nabla g \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Bajo una orientaciónde S y ∂S adecuadas. ¿Qué ocurre cuando $\vec{F}$ es conservativo?

Demostración:

Como $\vec{F}$ y g son campos vectorial y escalar de clase $\mathcal{C}^1$, podemos armar el siguiente campo vectorial $\vec{G} = g\vec{F}$ que es $\mathcal{C}^1$ por álgebra de funciones $\mathcal{C}^1$. Lueo dado que $S \cup \partial S$ es una superficie orientable regular a trozos, es posible utilizar el teorema de Stokes sobre el campo $\vec{G}$ en la superficie $S \cup \partial S$

$$\oint_{\partial S} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{G} \cdot d\vec{S}$$

donde la orientación de la integral de linea debe ir según la regla de la mano derecha para con la orientación de la superficie. Ahora, sólo falta explicitar cómo es el rotor de $\vec{G}$. De acuerdo a lo visto en clase

$$\nabla \times \vec{G} = \nabla \times (g\vec{F}) = \nabla g \times \vec{F} + g\nabla \times \vec{F}$$

por lo tanto

$$\oint_{\partial S} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial S} g\vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times (g\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \nabla g \times \vec{F} + g\nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

luego reordenando los términos

$$\iint_S g\nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} g\vec{F} \cdot d\vec{r} - \iint_S \nabla g \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Si $\vec{F}$ es conservativo, entonces $\nabla \times \vec{F} = 0$, luego

$$\oint_{\partial S} g\vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla g \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

P4.- Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$ campos escalares de clase $\mathcal{C}^2$. Puebe que para toda curva Γ cerrada y regular por trozos se tiene que

$$\oint_\Gamma f\nabla g \cdot d\vec{r} + \oint_\Gamma g\nabla f \cdot d\vec{r} = 0$$

Demostración:

Com Γ es una curva cerrada regular por trozos, y como f y g con funciones clase $\mathcal{C}^2$ entonces ∇f y ∇g con campos vectoriales clase $\mathcal{C}^1$, es posible utilizar el teorema de Stokes sobre Γ. Veamos la primera integral donde $\partial S = \Gamma$

$$\oint_\Gamma f\nabla g \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times (f\nabla g) \cdot d\vec{S}$$

Ahora, como ∇g es un campo conservativo, por ser el gradiente de un campo vectorial clase $\mathcal{C}^1$, entonces podemos utilizar el resultado de pa P3.

$$\oint_{\partial S} f\nabla g \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla f \times \nabla g \cdot d\vec{S}$$

Ahora, para la segunda integral

$$\oint_{\partial S} g\nabla f \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla g \times \nabla f \cdot d\vec{S}$$

pero el producto cruz es antisimétrico, por lo tanto sumando ambos resultados

$$\oint_{\Gamma} f\nabla g \cdot d\vec{r} + \oint_{\Gamma} g\nabla f \cdot d\vec{r} = 0$$

obteniéndose lo pedido.

P5.- Sean $\phi, \psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$ campos escalares de clase $\mathcal{C}^2$ y sea Σ una superficie regular por trozos orientable tal que su frontera $C = \partial S$ es una curva cerada regular por trozos. Demuestre que

$$\iint_{\Sigma} \nabla\phi \times \nabla\psi \cdot d\vec{S} = \oint_C \phi\nabla\psi \cdot d\vec{r}$$

Demostración:

Del resultado de la P3 podemos ver que este problema cumple todas las hipótesis para utilizar el teorema de Stokes, siendo válido los mismos cálculos realizados, con $\vec{F} = \nabla\psi$ y $g = \phi$.

$$\oint_{\partial S} g\vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial S} \phi\nabla\psi \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla\phi \times \nabla\psi \cdot d\vec{S} = \iint_S \nabla g \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$