Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto

Auxiliar 7

28 de Septiembre de 2022

P1.- Sea $\vec{r} = (x, y, z)$, con $r = ||\vec{r}||$ y las siguientes superficies $\Sigma = \partial\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : a \leq r \leq b\}$ orientada exteriormente

Sean $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ ambas de forma tal que

$$\vec{F}(x, y, z) = f(r^2)\vec{r}$$

a) Demuestre que

$$r^2 div(\vec{F}) = \frac{d}{dr}(r^3 f(r^2))$$

b) Verifique que

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi(b^3 f(b^2) - a^3 f(a^2))$$

c) Sea Γ una curva regular por trozos con extremos $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$ y $\mathcal{A} = (0, 0, a)$ recorrida desde $\mathcal{O}$ hasta $\mathcal{A}$ demuestre que

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} f(t)dt$$

P2.- Sea Ω un abierto acotado en $\mathbb{R}^3$ y sea u una función $\mathcal{C}^2$ que satisface

$$\begin{cases} \triangle u = f, \text{en} \Omega \\ \nabla u \cdot \hat{n} = g, \text{en} \partial\Omega \end{cases}$$

a) Demuestre que para toda función v de clase $\mathcal{C}^1$ se tiene que

$$\iiint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dV = \iint_{\partial\Omega} g v dA - \iiint_\Omega f v dV$$

b) Suponga que Ω es un abierto cuya adherencia no intersecta con el plano YZ. Demuestre que

$$\iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} dV = -|\Omega|$$

Para funciones f y g adecuadas

P3.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto conexo no vacío. Sea $\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo vectorial y $g : \Omega \longrightarrow R$ campo escalar ambos de clase $\mathcal{C}^1$. Puebe que si $S \cup \partial S \subseteq \Omega$ es tal que S es una superficie regular por trozos, entonces

$$\iint_S g \quad rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} g\vec{F} \cdot d\vec{r} - \iint_S \nabla g \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Bajo una orientacióndе S y ∂S adecuadas. ¿Qué ocurre cuando $\vec{F}$ es conservativo?

P4.- Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$ campos escalares de clase $\mathcal{C}^2$. Puebe que para toda curva Γ cerrada y regular por trozos se tiene que

$$\oint_\Gamma f\nabla g \cdot d\vec{r} + \oint_\Gamma g\nabla f \cdot d\vec{r} = 0$$

P5.- Sean $\phi, \psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$ campos escalares de clase $\mathcal{C}^2$ y sea Σ una superficie regular por trozos orientable tal que su frontera $C = \partial S$ es una curva cerada regular por trozos. Demuestre que

$$\iint_\Sigma \nabla\phi \times \nabla\psi \cdot d\vec{S} = \oint_C \phi\nabla\psi \cdot d\vec{r}$$