Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Fabián Sepúlveda Soto

Auxiliar 5

07 de Septiembre de 2022

P1.- Considere la siguiente función

$$\Phi_\alpha(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r}(1+\frac{\alpha r}{2})$$

la cual corresponde a un potencial electrostático en coordenadas esféricas. En la expresión anterior q corresponde a una carga puntual positiva ubicada en el origen de coordenadas y ϵ_0 la permitividad del vacío.

a) Calcule el campo eléctrico $E_\alpha(\vec{x}) = -\nabla\Phi_\alpha(\vec{x})$ en coordenadas esféricas.

Demostración:

Recordemos que para sistemas de referencia ortogonales, el gradiente de un campo escalar ϕ se puede calcular de la siguiente manera:

$$\nabla\phi = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial q_i}\hat{q}_i$$

donde h_i corresponden a los factores de escala de la parametrización. Para el caso de coordenadas esféricas se tiene que $h_r = 1$, $h_\theta = r$ y $h_\phi = rsin(\theta)$. Luego notanto que el campo escalar posee simetría esférica, la única componente del gradiente que se debe calcular es la radial, y por tanto el campo eléctrico resultantes resperatá esa simetría

$$\vec{E}_\alpha(r) - \nabla\Phi_\alpha(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}[\frac{e^{-\alpha r}}{r}(1+\frac{\alpha r}{2})]\hat{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}[e^{-\alpha r}(\frac{1}{r}+\frac{\alpha}{2})]\hat{r}$$

usando la regla de la multipicación se llega a que

$$\vec{E}_\alpha(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}[-\alpha e^{-\alpha r}(\frac{1}{r}+\frac{\alpha}{2}) + e^{-\alpha r}(-\frac{1}{r^2})]\hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}e^{-\alpha r}[\frac{\alpha}{r}+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{1}{r^2}]\hat{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r}[\frac{1}{r}+\alpha+\frac{\alpha^2 r}{2}]\hat{r}$$

En particular, si tomamos el límite de $\alpha \longrightarrow 0$, dada la continuidad de $\vec{E}_\alpha(r)$ respecto al parámetro α, se tiene que

$$\vec{E}_0(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

recuperando el campo eléctrico producido por una carga puntual en el origen. Los campos escalar y vectorial que se han encontrado son de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, por lo que hay que tener especial cuidado cuando se trabaje con dominios que contengan al origen.

b) Calcule $\nabla \cdot E_\alpha$ usando la divergencia en coordenadas esféricas. Para $\alpha = 0$ verifique su resultado para $\iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot E_0 dv = \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \oiint_{\partial B(0,\rho)} E_0 \cdot \hat{n} dS$, donde $B(0,\rho)$ es una esfera de radio ρ con centro en el origen. Discuta la validez de este teorema en este caso particular.

Demostración:

Recordemos cual es la forma que tiene la divergencia en coordenadas curvilinea

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\Pi_{i=1}^{N} h_i} \frac{\partial (F_i \Pi_{i \neq i} h_j)}{\partial q_i}$$

Luego, dada la simetría radial que posee el campo eléctrico $\vec{E}_\alpha(r)$, la única componente que aporta a la divergencia es la rerivada respecto a r

$$\nabla \cdot \vec{E}_\alpha(r) = \frac{1}{r^2 sin(\theta)} \frac{\partial (r^2 sin(\theta) E_\alpha)}{\partial_r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial_r} r^2 [\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r^2} [1 + \alpha r + \frac{\alpha^2 r^2}{2}]]$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial_r} [\frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{-\alpha r} (1 + \alpha r + \frac{\alpha^2 r^2}{2})] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial}{\partial_r} [e^{-\alpha r} (1 + \alpha r + \frac{\alpha^2 r^2}{2})]$$

luego utilizando la regla del producto

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} [-\alpha e^{-\alpha r} (1 + \alpha r + \frac{\alpha^2 r^2}{2}) + e^{-\alpha r} (\alpha + \alpha^2 r)] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-\alpha r} [-\alpha - \alpha^2 r - \frac{\alpha^3 r^2}{2} + \alpha + \alpha^2 r]$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-\alpha r} \frac{\alpha^3 r^2}{2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{-\alpha r} \frac{\alpha^3}{2}$$

Comparémoslo con calcular directamente $\nabla \cdot E_0(r)$

$$\nabla \cdot E_0(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2})] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2})] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [(\frac{q}{4\pi\epsilon_0})] = 0$$

Pero lo anterior es sólo válido cuando $r > 0$. Nuevamente hay que tener especial cuidado con el dominio que estamos tomando. Además tomando $\alpha \longrightarrow 0$ en $\nabla \cdot E_\alpha(r) \longrightarrow 0$

Calculemos primero

$$\iiint_{B(0,\rho)} \nabla \cdot E_\alpha(r) r^2 sin(\theta) dr d\theta d\phi = \iiint_{B(0,\rho)} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{-\alpha r} \frac{\alpha^3}{2} r^2 sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

la componente angular puede integrarse sola mediante Fubini

$$\frac{q\alpha^3}{2\epsilon_0} \int_0^\rho r^2 e^{-\alpha r} dr$$

integrando por partes dos veces se llega a que

$$= \frac{q\alpha^3}{2\epsilon_0}[-\frac{\rho^2 e^{-\alpha\rho}}{\alpha} + \frac{2}{\alpha}\int_0^\rho re^{-\alpha r}dr] = \frac{q\alpha^3}{2\epsilon_0}[-\frac{\rho^2 e^{-\alpha\rho}}{\alpha} + \frac{2}{\alpha}(-\frac{\rho e^{-\alpha\rho}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}(e^{-\alpha\rho}) - 1)]$$

$$= -\frac{q}{\epsilon_0}[\frac{\alpha^2\rho^2}{2} + \alpha\rho + 1]e^{-\alpha\rho} + \frac{q}{\epsilon_0}$$

ahora por otra parte, la integral se superficie quede descrita por

$$\oiint_{\partial B(0,1)} \vec{E}_\alpha(r)\cdot\hat{n}dS = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi [\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha\rho}}{\rho^2}[1+\alpha\rho+\frac{\alpha^2\rho^2}{2}]\rho^2 sin(\theta)d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0}[1+\alpha\rho+\frac{\alpha^2\rho^2}{2}]e^{-\alpha\rho}$$

Ahora, tomando el límite $\rho \longrightarrow \infty$, se tiene que la integral de volumen converge a 0 al igual que en el caso de la integral de superficie.

Ahora, si realizamos el cálculo para $\vec{E}_0$

$$\iiint_{B(0,\rho)} \nabla\cdot\vec{E}_0 dv = 0$$

pero la integral de superficie

$$\oiint_{\partial B(0,1)} \vec{E}_0\cdot\hat{n}dS = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}r^2 sin(\theta)d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Luego, esta inconsistencia en el teorema de la divergencia viene del hecho que el potencal no es diferenciable en el origen, y por tanto los límites entre α y ρ no conmutan, por lo cual introducimos la siguiente notación con la delta de Dirac para entender la inconsistencia que ocurre de utilizar el teorema de la divergencia en un dominio donde el campo no es diferenciable

$$\nabla\cdot\vec{E}_\alpha(r) = \frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}e^{-\alpha r}\frac{\alpha^3}{2}$$

donde $\delta(\vec{r})$ será una aplicación que fuera del origen toma el valor 0, y que

$$\int_{\mathbb{R}^3}\delta(\vec{r})dv = 1$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^3}F(\vec{r})\delta(\vec{r})dv = F(0)$$

que designaremos como la "derivada distribucional" de $\frac{1}{4\pi r^2}$ en el origen. De lo anterior

$$\nabla \cdot \vec{E}_0 = \frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\delta(r)$$

en su forma con simetría esférica. Luego

$$\iiint_{B(0,\rho)} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\delta(r) r^2 sin(\theta) dr d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_2} = \oiint_{\partial B(0,\rho)} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS$$

recuperando el teorea de la divergencia.

c) Calcule la siguiente integral de flujo

$$\oiint_{\partial B(0,\rho)} E_0 \cdot \hat{n} dS$$

¿Es satisfecha la ley de Gauss del electromagnetismo?

Demostración:

Como vimos, con la definición de la delta de Dirac se tiene que el flujo podemos calcularlo de la siguiente manera

$$\oiint_{\partial B(0,\rho)} E_0 \cdot \hat{n} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta} \frac{q}{4\pi\epsilon_0\rho^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\rho^2 sin(\theta) d\theta d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta} \frac{q}{4\pi\epsilon_0\rho^2}\rho^2 sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Veamos que ocurre con el flujo del campo $\vec{E}_\alpha$

$$\oiint_{\partial B(0,\rho)} E_\alpha \cdot \hat{n} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha\rho}}{\rho^2}[1+\alpha\rho+\frac{\alpha^2\rho^2}{2}]\hat{r}\cdot\hat{r}\rho^2 sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha\rho}}{[}1+\alpha\rho+\frac{\alpha^2\rho^2}{2}]$$

Luego, podemos recuperar el resultado límite cuando $\alpha \longrightarrow 0$ del teoremade la divergencia.

Un algo que se puede apreciar a simple vista, es que al tomar $\rho \longrightarrow \infty$ para el flujo de E_0 se mantiene constante (ya que no existe distriución de carga en el espacio más que la carga puntual en el origen), pero para $\alpha > 0$, el flujo calculado converge a 0. Luego, en vista de la ley de Gauss, la carga total en el espacio es nula para el caso $\alpha > 0$, y las bolas de radio ρ encierran tanto la carga puntual como la carga distribuida en el espacio.

d) Calcule la siguiente integral de volumen

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \epsilon_0 \nabla^2 \Phi_\alpha dv$$

¿Qué implicancias físicas tiene este resultado?

Demostración:

Por la definición del potencial Φ_α, y su relación con el campo eléctrico, es posible calcular la integral de volumen de la siguiente manera

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \epsilon_0 \nabla^2 \Phi_\alpha dv = -\iiint_{\mathbb{R}^3} \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}_\alpha dv$$

$$= \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho} [q\delta(\vec{r}) - \frac{q}{4\pi} e^{-\alpha r} \frac{\alpha^3}{2}] r^2 sin(\theta) dr d\theta d\phi = \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho} \frac{q}{4\pi r^2} \delta(r) r^2 sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

$$-\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho} \frac{q}{4\pi} e^{-\alpha r} \frac{\alpha^3}{2} r^2 sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

Ambdas integrales convergen, por lo cual podemos calcular los límites por separado. El primer límite queda

$$\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho} \frac{q}{4\pi r^2} \delta(r) r^2 sin(\theta) dr d\theta d\phi = \lim_{\rho \longrightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho} \frac{q}{4\pi} \delta(r) sin(\theta) dr d\theta d\phi = q$$

Luego el segundo límite queda como

$$-\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho} \frac{q}{4\pi} e^{-\alpha r} \frac{\alpha^3}{2} r^2 sin(\theta) dr d\theta d\phi = -\frac{q\alpha^3}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha r} r^2 dr$$

Acá es posible integrar por partes, pero utilizaremos una técnica popularizada por Feyneman, que corresponde a utilizar la regla de Leibniz adecuadamente para un parámetro continuo sobre integrales que presentan cierta regularidad. Consideremos la siguiente integral de parámetro α

$$I_\alpha = \int_0^{\infty} e^{-\alpha r} dr = \frac{1}{\alpha}$$

la cual es simple de calcular, y converge de manera uniforme $\forall \alpha > 0$. Como la el valor de la integral es una función continua y diferenciable $\forall \alpha > 0$, podemos drivar respecto al parámetro α

$$\frac{\partial I_\alpha}{\partial \alpha} = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha r} dr = -\int_0^{\infty} r e^{-\alpha r} dr = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}$$

Luego aplicando nuevamente la regla de Leibniz como hicimos antes

$$\frac{\partial^2 I_\alpha}{\partial \alpha^2} = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} e^{-\alpha r} dr = \int_0^{\infty} r^2 e^{-\alpha r} dr = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\alpha^3}$$

Luego el segundo límite queda descrito por

$$-\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho} \frac{q}{4\pi} e^{-\alpha r} \frac{\alpha^3}{2} r^2 sin(\theta) dr d\theta d\phi = -\lim_{\rho \longrightarrow \infty} \frac{q\alpha^3}{2} \frac{2}{\alpha^3} = -q$$

Luego la integral de volumen se anula por los argumentos dados en c) (la distribución de carga en todo el espacio anula la carga puntual del origen), y desde el punto de la física, dado que estos modelos describen de buena manera los nucreos cargados positivamente junto con un apantallamiento de los electrones que los rodean, significa que los átomos al observarlos (medir sus propiedades) se aprecian típicamente neutros (ya que no se aprecia carga neta encerrada en por una esfera de radio para efectos prácticos infinito).