MA2002. Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesores: Carlos Conca, Alexander Frank, Alexis Fuentes y Avelio Sepúlveda
Fecha: 1 de diciembre 2022
Tiempo: 3 horas

Control 3

P1. **(a)** (2.5 puntos) Sea $z = x + iy$ y

$$f(z) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - i\frac{2xy}{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Calcule el dominio de f e indique si f es holomorfa (o no) en su dominio.

(b) En este problema $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa. Escribimos $z = x + iy$ y

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{2}$$

donde u y v son funciones reales. También notamos $\tilde{f} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Note que $\tilde{f}$ es igual a f cuando identificamos $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$.

1) (1.5 puntos) Sea $J\tilde{f}(x, y)$ la matriz jacobiana de $\tilde{f}$ en el punto (x, y), usando que f es holomorfa muestre que

$$|Det(J\tilde{f})(x, y)| = |f'(z)|^2. \tag{4}$$

2) (2 puntos) Sean $g : \tilde{f}(D) \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^1. Justifique que

$$\nabla(g \circ \tilde{f})(x, y) = ((J\tilde{f})(x, y))^t \cdot \nabla g(\tilde{f}(x, y)). \tag{5}$$

y concluya que

$$\|\nabla(g \circ f)(x, y)\|^2 = |f'(z)|^2 \|\nabla g(f(x, y))\|^2. \tag{6}$$

Hint: Recuerde de Álgebra Lineal que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ y A matriz de 2×2

$$\|Av\|^2 = v^t A^t Av. \tag{7}$$

P2. **(a)** (1 puntos) Usando la suma geométrica calcule la serie de potencias de

$$\frac{1}{1 + z^2}, \tag{8}$$

y demuestre que converge si $|z| < 1$.

(b) (2 puntos) Usando lo anterior calcule la serie de potencias de

$$\frac{z}{(1 + z^2)^2}, \tag{9}$$

y demuestre que converge si $|z| < 1$.

(c) Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{10}$$

una serie de potencias con radio de convergencia $R = \frac{1}{\text{lím} \sqrt[n]{|c_n|}}$. Determine, en términos de R, el radio de convergencia de las siguientes series

1) (1 punto) $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^n$.
2) (2 puntos) $g_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$.
   Hint: Escriba $g_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$, explicite d_k y recuerde que $R = (\text{lím sup}_{k\to\infty} |d_k|^{1/k})^{-1}$.

P3. En este problema calcularemos las siguientes integrales para $\alpha \in [0, \pi/4)$

$$I = \int_0^\infty e^{-\cos(2\alpha)x^2} \cos(\sin(2\alpha)x^2)dx, \tag{11}$$

$$J = \int_0^\infty e^{-\cos(2\alpha)x^2} \sin(\sin(2\alpha)x^2)dx. \tag{12}$$

(a) (1 punto) Sea $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ como dibujada en la figura. Explique por qué $\int_\Gamma e^{-z^2}dz = 0$.

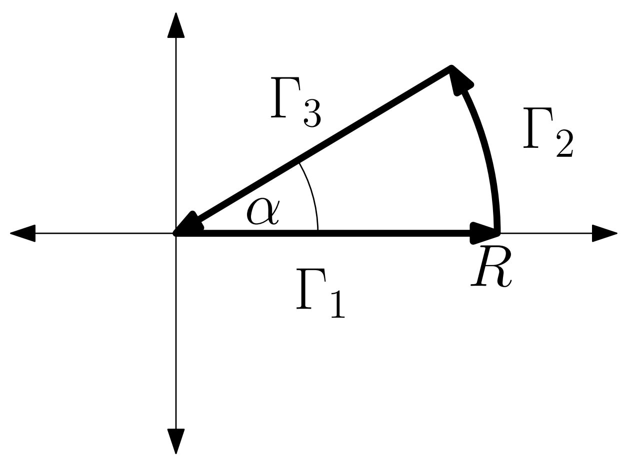

Figura 1: Descripción de Γ

(b) (1 punto) Parametrice Γ_1 y demuestre que cuando $R \to \infty$

$$\int_{\Gamma_1} e^{-z^2}dz \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{13}$$

(c) (2 puntos) Parametrice Γ_2 y demuestre que cuando $R \to \infty$

$$\int_{\Gamma_2} e^{-z^2}dz \to 0. \tag{14}$$

(d) (1.5 puntos) Parametrice Γ_3 y demuestre que cuando $R \to \infty$

$$\int_{\Gamma_3} e^{-z^2}dz \to -I\cos(\alpha) - J\sin(\alpha) - i(I\sin(\alpha) - J\cos(\alpha)). \tag{15}$$

(e) (0.5 puntos) Calcule los valores de las integrales I y J.