MA2002. Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesores: Carlos Conca, Alexander Frank, Alexis Fuentes y Avelio Sepúlveda
Fecha: 1 de diciembre 2021

Control 3

1. *a)* (2.5 puntos) Sea $z = x + iy$ y

$$f(z) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - i\frac{2xy}{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Calcule el dominio de f e indique si f es holomorfa (o no) en su dominio.

Solución: Notemos que f está definida siempre y cuando $x^2 + y^2 \neq 0$, por lo tanto su dominio es $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ (0.5 puntos).
Solución 1: Para ver si es holomorfa o no debemos ver si satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemman:

$$\partial_x u(x,y) = \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{2}$$

$$\partial_y u(x,y) = \frac{-2y(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} \tag{3}$$

$$\partial_x v(x,y) = \frac{-2y(x^2+y^2) + 4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2y^3 + 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \tag{4}$$

$$\partial_y v(x,y) = \frac{-2x(x^2+y^2) + 4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^3 + 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{5}$$

Notando que $\partial_x u(x,y) \neq \partial_y v(x,y)$ (o que $\partial_x v(x,y) \neq -\partial_y u(x,y)$) vemos que f no es holomorfa en su dominio (0.7 punto por calcular correctamente el par $(\partial_x u(x,y), \partial_y v(x,y))$ o $(\partial_x v(x,y), \partial_y u(x,y))$, 0.6 por decir que son diferentes).
Solución 2: Basta notar que $f = \frac{z^2}{z\bar{z}} = \frac{z}{\bar{z}}$(1 punto por identificar f). Si f fuera holomorfa, $z/f(z) = \bar{z}$ sería holomorfa lo que sabemos que no es cierto (1 punto por dar algún argumento correcto por el que f no es holomorfa).

b) En este problema $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa. Escribimos $z = x + iy$ y

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \tag{6}$$

donde u y v son funciones reales. También notamos $\tilde{f} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Note que $\tilde{f}$ es igual a f cuando identificamos $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$.

1) (1.5 puntos) Sea $J\tilde{f}(x,y)$ la matriz jacobiana de $\tilde{f}$ en el punto (x,y), usando que f es holomorfa muestre que

$$|Det(J\tilde{f})(x,y)| = |f'(z)|^2. \tag{8}$$

Solución: Por definición

$$\begin{aligned}
Det(J\tilde{f}(x,y)) &= Det\left(\begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{pmatrix}\right) \\
&= Det\left(\begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & -\partial_x v(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_x u(x,y) \end{pmatrix}\right) \qquad \text{(0,5 puntos)} \\
&= (\partial_x u(x,y))^2 + (\partial_x v(x,y))^2 .
\end{aligned}$$

Donde en la segunda igualdad usamos que como f es holomorfa, f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Concluimos usando que $\partial_x u(x,y) = \Re(f'(z))$ y $\partial_x v(x,y) = \Im(f'(z))$ (0.5 puntos por esta igualdad). (0.5 puntos por calcular correctamente el determinante e identificarlo con la norma).

2) (2 puntos) Sean $g : \tilde{f}(D) \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^1. Justifique que

$$\nabla(g \circ \tilde{f})(x,y) = ((J\tilde{f})(x,y))^t \cdot \nabla g(\tilde{f}(x,y)). \tag{9}$$

y concluya que

$$\|\nabla(g \circ f)(x,y)\|^2 = |f'(z)|^2 \|\nabla g(f(x,y))\|^2. \tag{10}$$

Hint: Recuerde de Álgebra Lineal que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ y A matriz de 2×2

$$\|Av\|^2 = v^t A^t A v. \tag{11}$$

Solución: Notemos que (9) es simplemente la regla de la cadena (0.5 puntos). Usando el hint obtenemos que

$$\left(\nabla g(\tilde{f}(x,y))\right)^t \cdot (J\tilde{f})(x,y) \cdot ((J\tilde{f})(x,y))^t \cdot \nabla g(\tilde{f}(x,y)).$$

Debemos calcular, usando Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}
(J\tilde{f})(x,y) \cdot ((J\tilde{f})(x,y))^t &= \begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_x v(x,y) \\ \partial y u(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & -\partial_x v(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_x u(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_x v(x,y) \\ -\partial_x v(x,y) & \partial_x u(x,y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\partial_x u(x,y))^2 + (\partial_x v(x,y))^2 & 0 \\ 0 & (\partial_x u(x,y))^2 + (\partial_x v(x,y))^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(1 punto por obtener este resultado usando correctamente las ecuaciones de Cauchy-Riemann) Usando que $\partial_x u(x,y) = \Re(f'(z))$ y $\partial_x v(x,y) = \Im(f'(z))$ (0.5 puntos por esta igualdad).

$$(J\tilde{f})(x,y) \cdot ((J\tilde{f})(x,y))^t = |f'(z)|^2 \cdot Id.$$

Por lo tanto (0.5 puntos por la conclusión)

$$\begin{aligned}
\|\nabla(g \circ f)(x,y)\|^2 &= \left(\nabla g(\tilde{f}(x,y))\right)^t \cdot (|f'(z)|^2 * Id) \cdot \nabla g(\tilde{f}(x,y)). \\
&= |f'(z)|^2 \|\nabla g(\tilde{f}(x,y))\|^2.
\end{aligned}$$

2. *a)* (1 puntos) Usando la suma geométrica calcule la serie de potencias de

$$\frac{1}{1+z^2}, \tag{12}$$

y demuestre que converge si $|z| < 1$.

Solución: Notemos que para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| < 1$ (0.3 puntos por recordar la fórmula de la suma geométrica)

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n.$$

Tomando $w = -z^2$ y notando que $|w| < 1$ ssi $|z| < 1$ (0.3 puntos por notar que converge cuando $|z| < 1$) tenemos que para todo $|z| < 1$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}. \tag{13}$$

(0.4 puntos por aplicar la fórmula a $w = -z^2$)

b) (2 puntos) Usando lo anterior calcule la serie de potencias de

$$\frac{z}{(1+z^2)^2}, \tag{14}$$

y demuestre que converge si $|z| < 1$.

Solución: Dado que (13) converge para $|z| < 1$ tenemos que el radio de convergencia de la serie es mayor o igual que 1 (0.5 puntos por reconocer que el radio de convergencia es mayor o igual a uno). Como $|z| < 1$ podemos intercambiar la suma con la derivada y obtener que

$$-\frac{2z}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n(-1)^n z^{2n-1}.$$

(1 punto por derivar dentro de la suma). Concluimos despejando la ecuación (0.5 puntos por obtener la fórmula correcta)

$$\frac{z}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1} z^{2n-1}.$$

c) Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{15}$$

una serie de potencias con radio de convergencia $R = \frac{1}{\text{lím} \sqrt[n]{|c_n|}}$. Determine, en términos de R, el radio de convergencia de las siguientes series

1) (1 punto) $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^n$.

Solución: Recordemos que $R_1 = \frac{1}{\text{lím sup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{2n}|}}$. Calculando el límite

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|c_{2n}|} &= \left(\sqrt[2n]{|c_{2n}|}\right)^2 && \text{(0.5 Puntos por escribir el límite de esta manera)} \\ &\to \frac{1}{R^2}. && \text{(0.5 Puntos por usar continuidad y concluir.)} \end{aligned}$$

Por lo tanto $R_1 = R^2$.

2) (2 puntos) $g_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$.
Hint: Escriba $g_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$, explicite d_k y recuerde que $R = (\text{lím sup}_{k\to\infty} |d_k|^{1/k})^{-1}$.

Solución: Siguiendo el hint, notamos que (0.5 puntos por escribir d_k.)

$$d_k := \begin{cases} c_n & \text{si } k = 2n, \\ 0 & \text{si } k = 2n+1. \end{cases}$$

Ahora debemos calcular $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{d_k}$. Primero debemos obtener una cota inferior, para eso usemos la subsecuencia $2k$ (0.5 puntos por notar que esto es sólo una cota inferior.)

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|d_k|} &\geq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|d_{2k}|} \\ &\geq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|c_k|} \\ &= \sqrt{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \sqrt{\frac{1}{R}} \end{aligned}$$

(0.5 puntos por calcular correctamente este límite.)
Para calcular una cota superior, usemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$

$$c_n \leq \left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)^n.$$

Usando lo anterior y que cuando k es impar $d_k = 0$ tenemos que

$$|d_k| \leq \left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)^{\frac{k}{2}},$$

por lo tanto para $k \geq 2n_0$

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{|d_k|} &\leq \left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \limsup \sqrt[k]{|d_k|} &\leq \left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(0.5 puntos por calcular correctamente esta cota superior.) Por lo tanto, usando la cota superior e inferior $\limsup \sqrt[k]{|d_k|} = \sqrt{1/R}$, por lo que $R_2 = \sqrt{R}$.

3. En este problema calcularemos las siguientes integrales para $\alpha \in [0, \pi/4)$

$$I = \int_0^\infty e^{-\cos(2\alpha)x^2} \cos(\operatorname{sen}(2\alpha)x^2)dx, \tag{16}$$

$$J = \int_0^\infty e^{-\cos(2\alpha)x^2} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2\alpha)x^2)dx. \tag{17}$$

a) (1 punto) Sea $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ como dibujada en la figura. Explique por qué $\int_\Gamma e^{-z^2} dz = 0$.

Solución: Como Γ es una curva cerrada y e^{-z^2} es holomorfa en $\mathbb{C}$ (o debido a que es una serie de potenciascon radio de convergencia ∞) se tiene que la integral es 0. (1 punto por explicar correctamente.)

b) (1 punto) Parametrice Γ_1 y demuestre que cuando $R \to \infty$

$$\int_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{18}$$

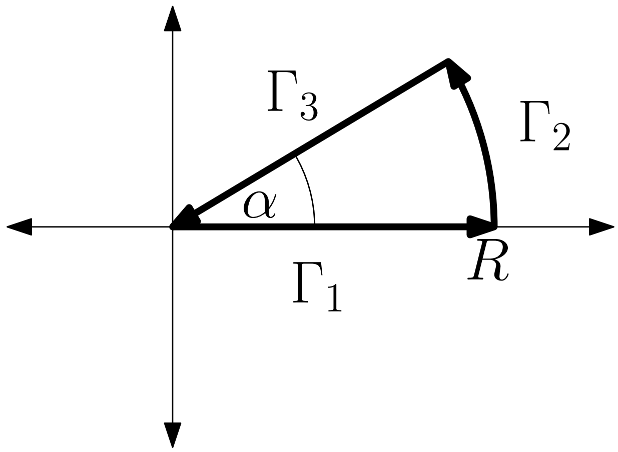

Figura 1: Descripción de Γ

Solución: Podemos parametrizar Γ_1 por $x \in [0, R]$, usando (0.4 punto por parametrizar correctamente.)

$$\gamma(x) = x + 0i, \quad \gamma'(x) = 1.$$

Tenemos que

$$\int_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-x^2} dx \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(0.3 puntos por la primera igualdad, 0.3 por la última igualdad.)

c) (2 puntos) Parametrice Γ_2 y demuestre que cuando $R \to \infty$

$$\int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz \to 0. \tag{19}$$

Solución: Primero, parametricemos Γ_2 usando coordenadas polares en los complejos. Tomando $\theta \in [0, \alpha]$

$$\gamma(\theta) = Re^{i\theta}, \quad \gamma'(\theta) = iRe^{i\theta}.$$

(0.5 punto por parametrizar correctamente.) Podemos escribir la integral como

$$\int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz = \int_0^\alpha iRe^{-R^2 e^{i2\theta}} d\theta = \int_0^\alpha iRe^{-R^2\cos(2\theta) - iR^2 \operatorname{sen}(2\theta)} d\theta$$

(0.5 puntos por escribir correctamente la integral.) Para mostrar que converge a 0 acotemos superiormente el módulo de la integral

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz\right| &\leq \int_0^\alpha \left| iRe^{-R^2\cos(2\theta) - iR^2 \operatorname{sen}(2\theta)} \right| d\theta \\
&= |R| \int_0^\alpha e^{-R^2\cos(2\theta)} d\theta && \text{(0.5 puntos por pasar el módulo dentro de la integral.)} \\
&\leq |R| \int_0^\alpha e^{-R^2\cos(2\alpha)} d\theta \\
&= |R|\alpha e^{-R^2\cos(2\alpha)} \overset{R\to\infty}{\to} 0. && \text{(0.5 puntos por usar la monotonía de cos y concluir.)}
\end{aligned}$$

Donde notamos que $\alpha < \pi/4$ por lo que $\cos(2\alpha) > 0$.

d) (1.5 puntos) Parametrice Γ_3 y demuestre que cuando $R \to \infty$

$$\int_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz \to -I\cos(\alpha) - J\operatorname{sen}(\alpha) - i(I\operatorname{sen}(\alpha) - J\cos(\alpha)). \tag{20}$$

Solución: Podemos parametrizar Γ_1 por $r \in [0, R]$, usando (0.5 puntos por parametrizar correctamente).

$$\gamma(x) = (R-r)e^{i\alpha}, \quad \gamma'(x) = -e^{i\alpha}.$$

Tenemos que $\int_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz$ es igual a

$$\begin{aligned}
&-\int_0^R e^{-(R-r)^2 e^{i2\alpha}} e^{i\alpha} dr \\
&= -\int_0^R e^{-r^2 e^{i2\alpha}} e^{i\alpha} dr \\
&= -\int_0^R e^{-r^2(\cos(2\alpha)+i\operatorname{sen}(2\alpha))}(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(2\alpha))dr \quad \text{(0.5 puntos por escribir la integral correctamente)} \\
&= -\int_0^R e^{-r^2\cos(2\alpha)}(\cos(\operatorname{sen}(2\alpha)r^2) + i\operatorname{sen}(-\operatorname{sen}(2\alpha)r^2))(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))dr \\
&= -\int_0^R e^{-r^2\cos(2\alpha)}(\cos(\operatorname{sen}(2\alpha)r^2)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2\alpha)r^2)\operatorname{sen}(\alpha)) \\
&\qquad\qquad - i\int_0^R e^{-r^2\cos(2\alpha)}(\cos(\operatorname{sen}(2\alpha)r^2)\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2\alpha)r^2)\cos(\alpha))dr \\
&\overset{R\to\infty}{\to} -I\cos(\alpha) - J\operatorname{sen}(\alpha) - i(I\operatorname{sen}(\alpha) - J\cos(\alpha)).
\end{aligned}$$

(0.5 puntos por concluir correctamente).

e) (0.5 puntos) Calcule los valores de las integrales I y J.

Solución: Usando las preguntas anteriores tenemos que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - I\cos(\alpha) - J\operatorname{sen}(\alpha) - i(I\operatorname{sen}(\alpha) - J\cos(\alpha)) = 0.$$

Por lo tanto, viendo la parte imaginaria

$$I\operatorname{sen}(\alpha) = J\cos(\alpha) \tag{21}$$
$$J = \tan(\alpha)I, \tag{22}$$

Al observar la parte real, tenemos que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = I\cos(\alpha) + J\operatorname{sen}(\alpha) = I\cos(\alpha) + I\operatorname{sen}(\alpha)\tan(\alpha) = \frac{I}{\cos(\alpha)}. \tag{23}$$

Por lo tanto concluimos que

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \alpha,$$
$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin(\alpha).$$

(0.5 puntos por resolver correctamente las ecuaciones).